Capacidade de Processo

Roteiro

Limites de Especificação

Capacidade de Processo

- Capacidade de produzir itens de acordo com as especificações do projeto (itens conformes)
  - √ Não está apenas vinculada à presença ou ausência de causas especiais;
  - √ As causas especiais reduzem a capacidade do processo e aumentam o número de não-conformidades produzidas.;

Limites Naturais de Especificação

- Valores de X situados a $\mu_0 \pm 3\ \sigma_0$
  - √ Adotando-se as estimativas de μ_0 e σ_0: $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{X}} \\ \bar{R}/d_2 \end{array} \right.$

$$
\begin{aligned}
LSN &= \mu_0 + 3\sigma_0 = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{R}}{d_2} \\
LIN &= \mu_0 - 3\sigma_0 = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{R}}{d_2}
\end{aligned}
$$

Exemplo

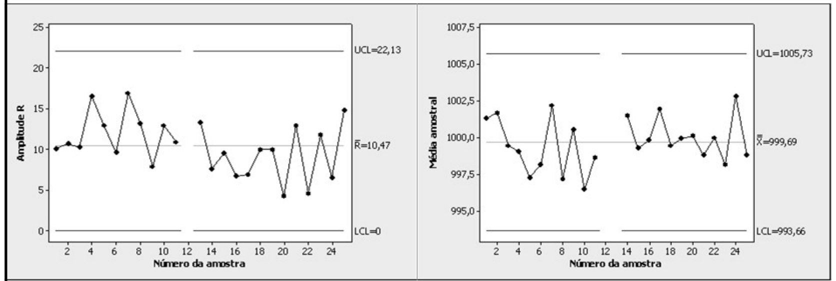
- Variável de interesse (X)
  - √ Volume de saco de leite (em ml)
  - √ Valor-nominal: 1.000 ml
- Estimativa dos parâmetros do processo
  - √ 25 amostras de tamanho 5 coletadas com o processo sob controle

- Tabela 3.2 (Branco Costa et. al)
  - √ Valores de $X_{ij} \sim N(1.000, 4^2)$

X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R
1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	1001,3	10,1
1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	1001,7	10,7
999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	999,5	10,3
1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	999,1	16,6
999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	997,3	12,9
1003,3	996,8	997,2	993,6	1000,1	998,2	9,7
999,7	1012,1	995,2	1001,8	1002,2	1002,2	16,9
1000,1	995,3	990,0	997,5	1003,2	997,2	13,2
1004,3	1001,4	1001,6	999,1	996,4	1000,6	7,9
999,0	995,8	989,9	995,1	1002,8	996,5	12,9

$$\bar{\bar{X}} = 999,7 \qquad \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{m} = 10,5 \qquad \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{10,5}{2,326} = 4,514$$

- √ Gráfico de $\overline{X}$ e R (sem 12ª amostra):



Limites Naturais de Especificação

$$
\begin{aligned}
LSN &= \mu_0 + 3\sigma_0 = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{R}}{d_2} = 999,7 + 3(4,514) = 1.013,24 \\
LIN &= \mu_0 - 3\sigma_0 = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{R}}{d_2} = 999,7 - 3(4,514) = 986,16
\end{aligned}
$$

Limites de Controle para Carta $\bar{X}$

- Limites de Controle: $\mu_0 \pm 3\sigma_{\bar{X}} = \mu_0 \pm 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

$$
\begin{aligned}
LSC &= \mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 999,7 + 3\frac{4,514}{\sqrt{5}} = 1.005,76 \\
LIC &= \mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 999,7 - 3\frac{4,514}{\sqrt{5}} = 993,64
\end{aligned}
$$

√ Os Limites de Controle aplicam-se a médias amostrais

Limites de Especificação

- São estabelecidos pela engenharia
  - √ Visam minimizar as conseqüências de o produto estar fora deles
- Aplicam-se a valores individuais de X
- Valor individual e média têm as mesmas unidades físicas
  - √ escala de variação da média é menor que a dos valores individuais de X (desvios-padrão diferentes)

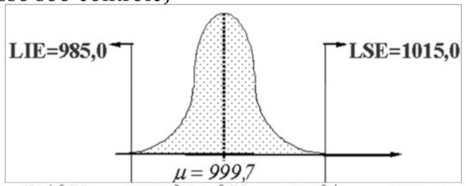
Porcentagem Fora de Especificação – PFE

- Quando o processo está sob controle (estável e ajustado) o ideal é que toda a distribuição esteja dentro dos limites de especificação
  - √ Porcentagem de Itens Fora de Especificação:

    PFE = P{ $X >$ LSE ou $X <$ LIE | $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$ }
- Quando o processo estiver fora de controle há um aumento da PFE:

  PFE = P{ $X >$ LSE ou $X <$ LIE | $\mu = \mu_1$ e $\sigma = \sigma_1$ }

- Exemplo: Volume de sacos de leite
  - √ Processo sob controle: $\mu_0 = 999{,}7$ e $\sigma_0 = 4{,}514$
  - √ Limites de Especificação:
    - LIE = 985 ml
    - LSE = 1015 ml
  - √ Porcentagem de itens fora da especificação (processo sob controle)



$$\begin{aligned} PFE &= P(\{X > 1015\} \cup \{X < 985\} | \mu = 999,7; \sigma = 4,514) \\ &= 0,000350158 + 0,000563905 \\ &= 0,000914063 \end{aligned}$$

Medidas de Desempenho: Alarmes Falsos, Poder e PFE

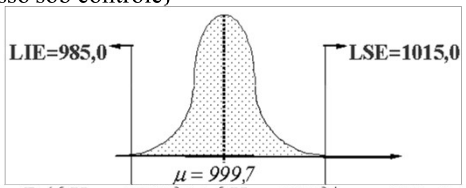
PFE e Poder do Gráfico de $\overline{X}$

- Poder do gráfico para processo sob controle:

$$\begin{aligned} P_d &= P\{Z < LIC_{\overline{X}}\} + P\{Z > LSC_{\overline{X}}\} \\ &= P\{Z < -3,00\} + P\{Z > 3,00\} \\ &= 0,270\% \end{aligned}$$

- PFE depende do intervalo de especificação

- Exemplo: Volume de sacos de leite
  - √ Processo sob controle: $\mu_0 = 999{,}7$ e $\sigma_0 = 4{,}514$
  - √ Limites de Especificação:
    - LIE = 985 ml
    - LSE = 1015 ml
  - √ Porcentagem de itens fora da especificação (processo sob controle)



$$\begin{aligned} PFE &= P(\{X > 1015\} \cup \{X < 985\} | \mu = 999,7; \sigma = 4,514) \\ &= 0,000350158 + 0,000563905 \\ &= 0,000914063 \end{aligned}$$

- Deslocamento da média para $\mu_1 = 1000$ ($\sigma = \sigma_0$)
  - √ Porcentagem de itens fora de especificação

$$\begin{aligned}
\text{PFE} &= \text{P}\{X < \text{LIE}\} + \text{P}\{X > \text{LSE}\} \\
&= \text{P}\left\{Z < \frac{985 - 1000}{4{,}514}\right\} + \text{P}\left\{Z > \frac{1015 - 1000}{4{,}514}\right\} \\
&= \text{P}\{Z < -3{,}15\} + \text{P}\{Z > 2{,}85\} = 0{,}0891\%
\end{aligned}$$

  - √ Poder do gráfico da média

$$\begin{aligned}
\text{P}_\text{d} &= \text{P}\{Z < \text{LIC}_{\overline{\text{X}}}\} + \text{P}\{Z > \text{LSC}_{\overline{\text{X}}}\} \\
&= \text{P}\left\{Z < \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} - 3\right\} + \text{P}\left\{Z < \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + 3\right\} \\
&= \text{P}\{Z < \text{-}3{,}15\} + \text{P}\{Z > 2{,}85\} = 0{,}300\%
\end{aligned}$$

- Memória de Cálculo: PFE e P_d:

Parâmetros Processo	
μ_0 =	999,7
σ_0 =	4,514

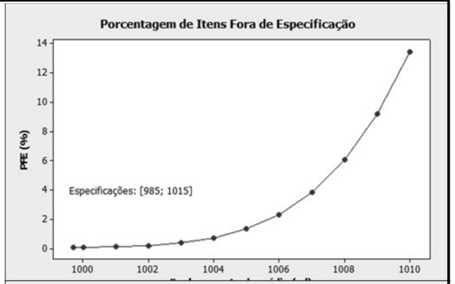
Limites de Especificação	
LSE:	985,0
LIE:	1.015,0

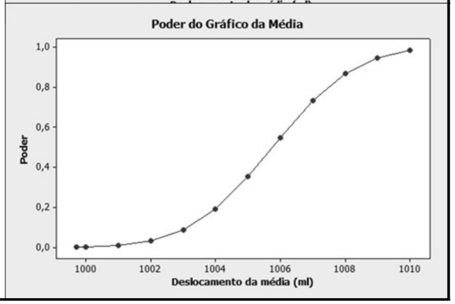
Limites de Controle	
k:	3
n:	5

σ_1	μ_1	Z_{LIE}	Z_{LSE}	$P\{Z < Z_{LIE}\}$	$P\{Z > Z_{LSE}\}$	PFE (%)	Z_{LIC}	Z_{LSC}	$P\{Z < Z_{LIC}\}$	$P\{Z > Z_{LSC}\}$	Pd (%)
4,514	999,7	-3,256	3,389	0,00056	0,00035	0,09	-3,000	3,000	0,00135	0,00135	0,27
4,514	1.000,0	-3,323	3,323	0,00045	0,00045	0,09	-3,149	2,851	0,00082	0,00218	0,30
4,514	1.001,0	-3,544	3,101	0,00020	0,00096	0,12	-3,644	2,356	0,00013	0,00924	0,94
4,514	1.002,0	-3,766	2,880	0,00008	0,00199	0,21	-4,139	1,861	0,00002	0,03139	3,14
4,514	1.003,0	-3,987	2,658	0,00003	0,00393	0,40	-4,635	1,365	0,00000	0,08607	8,61
4,514	1.004,0	-4,209	2,437	0,00001	0,00741	0,74	-5,130	0,870	0,00000	0,19214	19,21
4,514	1.005,0	-4,430	2,215	0,00000	0,01337	1,34	-5,625	0,375	0,00000	0,35395	35,39
4,514	1.006,0	-4,652	1,994	0,00000	0,02309	2,31	-6,121	-0,121	0,00000	0,54802	54,80
4,514	1.007,0	-4,874	1,772	0,00000	0,03818	3,82	-6,616	-0,616	0,00000	0,73105	73,11
4,514	1.008,0	-5,095	1,551	0,00000	0,06049	6,05	-7,111	-1,111	0,00000	0,86679	86,68
4,514	1.009,0	-5,317	1,329	0,00000	0,09190	9,19	-7,607	-1,607	0,00000	0,94594	94,59
4,514	1.010,0	-5,538	1,108	0,00000	0,13401	13,40	-8,102	-2,102	0,00000	0,98222	98,22

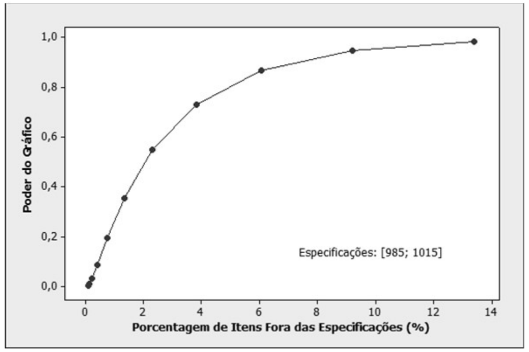
- Valores de PFE e P_d:
  - √ Especificações:
    [985; 1015]

μ_1	PFE (%)	Pd
999,7	0,09	0,0027
1.000,0	0,09	0,0030
1.001,0	0,12	0,0094
1.002,0	0,21	0,0314
1.003,0	0,40	0,0861
1.004,0	0,74	0,1921
1.005,0	1,34	0,3539
1.006,0	2,31	0,5480
1.007,0	3,82	0,7311
1.008,0	6,05	0,8668
1.009,0	9,19	0,9459
1.010,0	13,40	0,9822





- Porcentagem de Itens Fora das Especificações e Poder do Gráfico



- Memória de Cálculo: PFE e P_d:
  - √ Especificações mais rigorosas:

Parâmetros Processo	
μ_0 =	999,7
σ_0 =	4,514

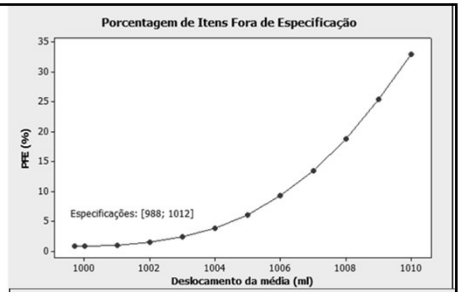
Limites de Especificação	
LSE:	988,0
LIE:	1.012,0

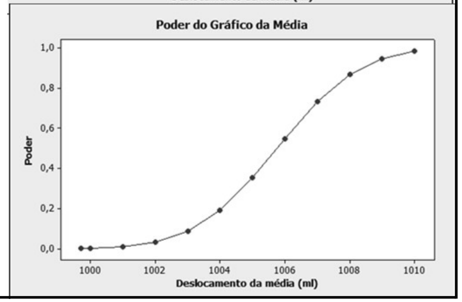
Limites de Controle	
k:	3
n:	5

σ_1	μ_1	Z_{LIE}	Z_{LSE}	$P\{Z < Z_{LIE}\}$	$P\{Z > Z_{LSE}\}$	PFE (%)	Z_{LIC}	Z_{LSC}	$P\{Z < Z_{LIC}\}$	$P\{Z > Z_{LSC}\}$	Pd (%)
4,514	999,7	-2,592	2,725	0,00477	0,00322	0,80	-3,000	3,000	0,00135	0,00135	0,27
4,514	1.000,0	-2,658	2,658	0,00393	0,00393	0,79	-3,149	2,851	0,00082	0,00218	0,30
4,514	1.001,0	-2,880	2,437	0,00199	0,00741	0,94	-3,644	2,356	0,00013	0,00924	0,94
4,514	1.002,0	-3,101	2,215	0,00096	0,01337	1,43	-4,139	1,861	0,00002	0,03139	3,14
4,514	1.003,0	-3,323	1,994	0,00045	0,02309	2,35	-4,635	1,365	0,00000	0,08607	8,61
4,514	1.004,0	-3,544	1,772	0,00020	0,03818	3,84	-5,130	0,870	0,00000	0,19214	19,21
4,514	1.005,0	-3,766	1,551	0,00008	0,06049	6,06	-5,625	0,375	0,00000	0,35395	35,39
4,514	1.006,0	-3,987	1,329	0,00003	0,09190	9,19	-6,121	-0,121	0,00000	0,54802	54,80
4,514	1.007,0	-4,209	1,108	0,00001	0,13401	13,40	-6,616	-0,616	0,00000	0,73105	73,11
4,514	1.008,0	-4,430	0,886	0,00000	0,18778	18,78	-7,111	-1,111	0,00000	0,86679	86,68
4,514	1.009,0	-4,652	0,665	0,00000	0,25316	25,32	-7,607	-1,607	0,00000	0,94594	94,59
4,514	1.010,0	-4,874	0,443	0,00000	0,32887	32,89	-8,102	-2,102	0,00000	0,98222	98,22

- Valores de PFE e P_d:
  - √ Especificações: [988; 1012]

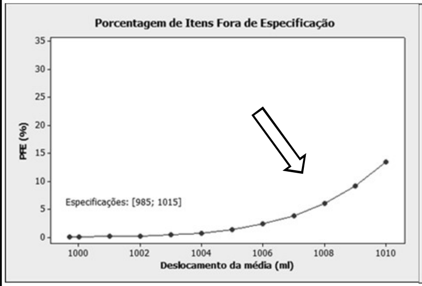
μ_1	PFE (%)	Pd
999,7	0,80	0,0027
1.000,0	0,79	0,0030
1.001,0	0,94	0,0094
1.002,0	1,43	0,0314
1.003,0	2,35	0,0861
1.004,0	3,84	0,1921
1.005,0	6,06	0,3539
1.006,0	9,19	0,5480
1.007,0	13,40	0,7311
1.008,0	18,78	0,8668
1.009,0	25,32	0,9459
1.010,0	32,89	0,9822



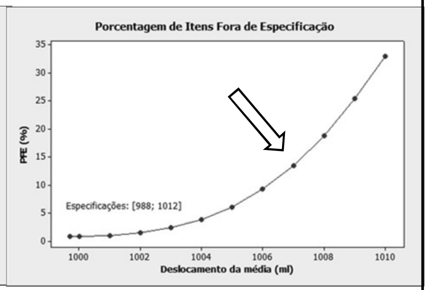


- PFE e Deslocamento da Média

Especificações: [985; 1015]

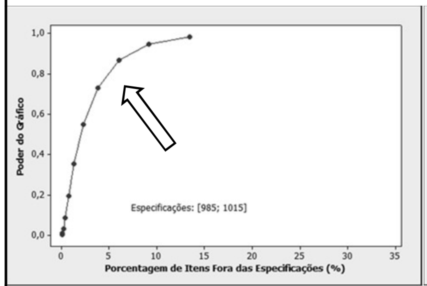


Especificações: [988; 1012]

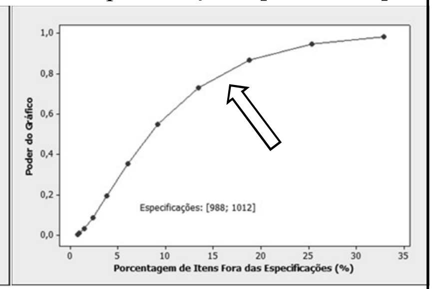


- PFE e Poder do Gráfico

Especificações: [985; 1015]



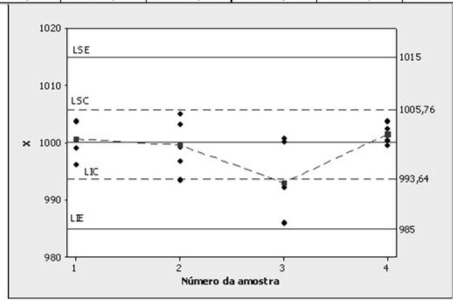
Especificações: [988; 1012]



- Comentários:
  - √ Especificações [985; 1015]
    - 70% de chance de sinalizar desajuste que eleve a PFE para 4%
  - √ Especificações [988; 1012] (mais rígidas)
    - poder do gráfico cai para cerca de 20%.

Exemplo

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Média
999,10	996,17	1000,73	1003,83	1003,60	1000,69
1005,20	993,45	999,30	1003,29	996,74	999,60
992,11	985,91	1000,09	1000,86	986,02	993,00
1003,75	1002,44	1001,38	1000,47	999,63	1001,53



√ Média fora dos limites de controle não implica necessariamente itens produzidos fora da especificação

- Comentários
  - √ $\bar{X}_3$ sinaliza mudança no processo
  - √ Provavelmente o nível de mudança na média do processo ainda não é suficiente para gerar unidades não conformes
  - √ É conveniente intervir no processo, pois sua capacidade está reduzida
    - A ocorrência de novas causas especiais pode levar à geração de itens não-conformes com mais facilidade
  - √ Há processos incapazes de atender às especificações, mesmo estando sob controle

Índices de Capacidade do Processo

Exemplo – Pistões

- Anéis de pistão para motores de automóveis produzidos por processo de forja
  - √ Objetivo: Controle estatístico para diâmetro interno dos anéis por cartas Xbarra-R
  - √ Amostras de tamanho 5
  - √ 25 amostras
- Planilha: *BD_CQ_II* / guia: *pistoes*

Estatísticas Descritivas

- Média global:
  - √ 74,001
- Amplitude média:
  - √ 0,023
- Desvio-padrão do processo:
  - √ 0,0099

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0,023}{2,326}$$

Fração de Anéis Não-conformes

- Limites de Especificação:
  - √ 74,000 ± 0,050 mm
- Fração de anéis não-conformes:

$$p = P\{X < 73,950\} + P\{X > 74,050\}$$

```
MTB > Let k1 = 74,0012
MTB > Let k2 = 0,0099914
MTB > name k1 'media'
MTB > name k2 'desvio'
MTB > cdf 73,950 k3;
SUBC> normal media desvio.
MTB > cdf 74,050 k4;
SUBC> normal media desvio.
MTB > let k5 = k3 + (1 - k4)
MTB > print k5

Data Display

K5    0,000000668
```

1 parte por milhão (ppm)

Capacidade do Processo

- Índice de Capacidade do Processo (C_p):

$$C_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sigma} \qquad \hat{C}_p = \frac{74,05 - 73,95}{6(0,0099)} = 1,68$$

- Porcentagem da faixa de especificação usada pelo sistema:

$$P = \left(\frac{1}{C_p}\right) 100\% \qquad \hat{P} = \left(\frac{1}{\hat{C}_p}\right) 100\% = 59,5\%$$

Índices de Capacidade do Processo

$$C_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sigma}$$

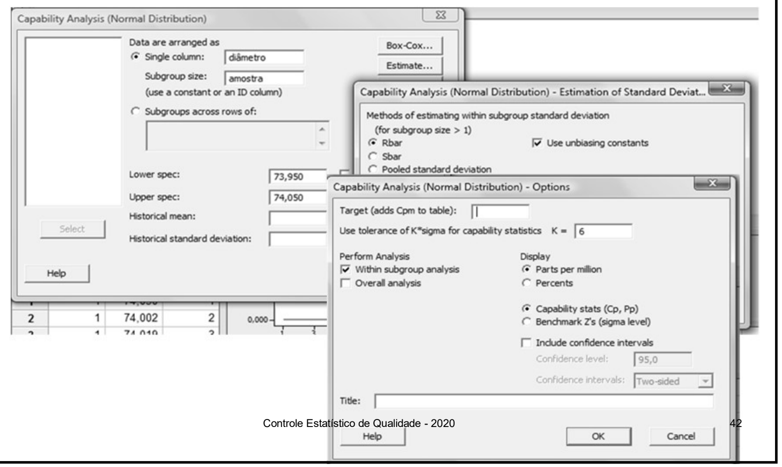
$$C_{pk} = \min\left\{\frac{\text{LSE} - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - \text{LIE}}{3\sigma}\right\}$$

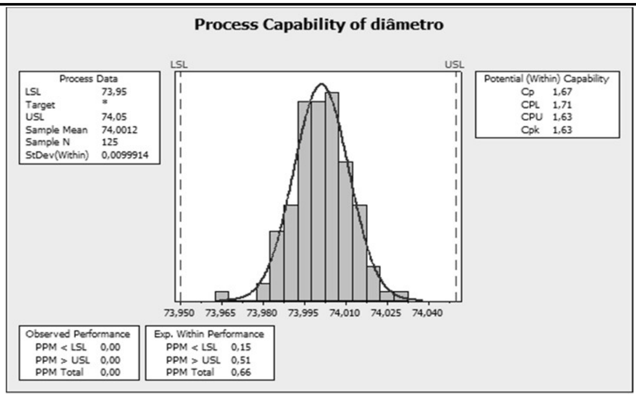
$$C_{pm} = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sqrt{\sigma^2 + (d - \mu)^2}}$$

- São adimensionais e medem indiretamente a capacidade de o processo atender às especificações
  - √ (quanto maior, melhor)
- Os índices se igualam quando d = μ
  - √ d: ponto médio do intervalo de especificação

Capacidade Processo – Minitab

Stat > Quality Tools > Capability Analysis > Normal ➔





PPM Total: número de partes por milhão cuja característica de interesse está fora dos limites de tolerância

C_p e Falhas Associadas (ppm defeituosas)

Table 7-2 Values of the Process Capability Ratio (C_p) and Associated Process Fallout for a Normally Distributed Process (in Defective ppm) That Is in Statistical Control

	Process Fallout (in defective ppm)	
PCR	One-Sided Specifications	Two-Sided Specifications
0.25	226,628	453,255
0.50	66,807	133,614
0.60	35,931	71,861
0.70	17,865	35,729
0.80	8,198	16,395
0.90	3,467	6,934
1.00	1,350	2,700
1.10	484	967
1.20	159	318
1.30	48	96
1.40	14	27
1.50	4	7
1.60	1	2
1.70	0.17	0.34
1.80	0.03	0.06
2.00	0.0009	0.0018

C_p – Valores Mínimos Recomendados

Table 7-3 Recommended Minimum Values of the Process Capability Ratio

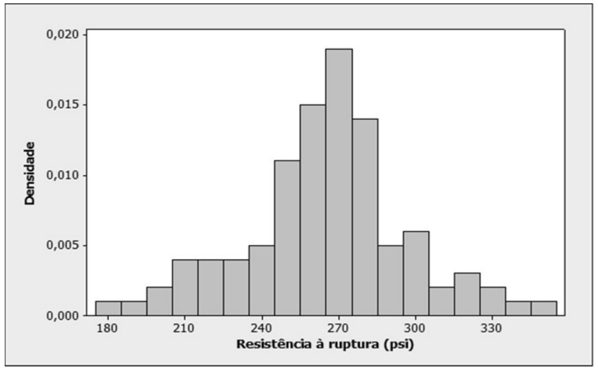
	Two-Sided Specifications	One-Sided Specifications
Existing processes	1.33	1.25
New processes	1.50	1.45
Safety, strength, or critical parameter, existing process	1.50	1.45
Safety, strength, or critical parameter, new process	1.67	1.60

Exemplo – Garrafas

- Resistência a ruptura de garrafas de vidros de 1 litro de refrigerante
  - √ Amostra: 100 garrafas
  - √ Processo considerado como estável
  - √ Planilha: *BD_CQ_II* / guia: *garrafas*

Histograma

Graph > Histogram > Simple ➔



Estatísticas Descritivas

- Média das resistências:
  - √ 264,06
- Desvio-padrão das resistências:
  - √ 32,0179
- Capacidade do Processo:
  - √ 264,06 ± 3(32,0179) = 264 ± 96 psi
- Se aproximadamente normal:
  - √ 99,73% das garrafas romperão entre 168 e 360

Índice de Capacidade do Processo

$$C_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sigma}$$

- Limites de Especificação:
  - √ LIE = 200 (unilateral)
- Índice de Capacidade: $\hat{C}_{p_i} = \dfrac{264,06 - 200}{3(32,0179)} = 0,67$
- Fração não-conforme: 16.837 ppm

```
MTB > pdf 200;
SUBC> normal 264,06 32,0179.
```

Probability Density Function

```
Normal with mean = 264,06 and standard deviation = 32,0179

  x     f( x )
200  0,0016837
```


Índices de Capacidade do Processo

$$C_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sigma}$$

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{\text{LSE} - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - \text{LIE}}{3\sigma}\right\}$$

$$C_{pm} = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sqrt{\sigma^2 + (d - \mu)^2}}$$

- São adimensionais e medem indiretamente a capacidade de o processo atender às especificações
  - √ (quanto maior, melhor)
- Os índices se igualam quando d = μ
  - √ d: ponto médio do intervalo de especificação

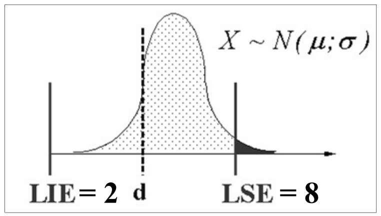
Índices de Capacidade

- Suposições importantes:
  - √ A característica de qualidade tem distribuição normal
  - √ O processo está sob controle estatístico
  - √ No caso de especificações bilaterais, a média do processo está centrada entre os limites de especificação superior e inferior

Índices de Capacidade do Processo – C_p

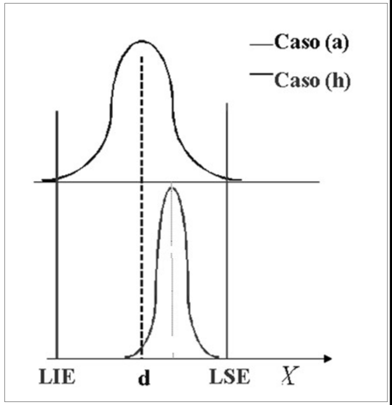
Caso	(μ, σ)	C_p
(a)	(5; 1)	1
(b)	(6; 1)	1
(c)	(7; 1)	1
(d)	(8; 1)	1
(e)	(9; 1)	1
(f)	(10; 1)	1
(g)	(7; 0,5)	2
(h)	(6; 0,5)	2

$$C_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sigma}$$



- C_p e PFE

Caso	(μ, σ)	C_p	PFE (%)
(a)	**(5; 1)**	**1**	**0,270**
(b)	(6; 1)	1	2,278
(c)	(7; 1)	1	15,866
(d)	(8; 1)	1	50,000
(e)	(9; 1)	1	84,134
(f)	(10; 1)	1	97,725
(g)	(7; 0,5)	2	2,275
(h)	**(6; 0,5)**	**2**	**0,003**

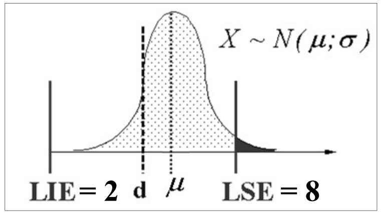


- Comentários – C_p:
  - √ É insensível a mudanças na média do processo (constante para os casos *a*, *f*, *g* e *h*)
  - √ Só deve ser usado quando μ permanece centrada em d
  - √ Não se aplica a especificação unilateral

Índices de Capacidade do Processo – C_{pk}

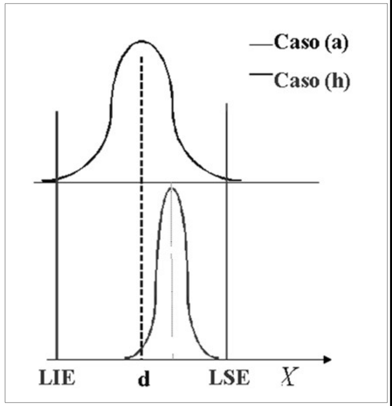
Caso	(μ, σ)	C_{pk}
(a)	(5; 1)	1
(b)	(6; 1)	2/3
(c)	(7; 1)	1/3
(d)	(8; 1)	0
(e)	(9; 1)	–1/3
(f)	(10; 1)	–2/3
(g)	(7; 0,5)	2/3
(h)	(6; 0,5)	4/3

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{\text{LSE} - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - \text{LIE}}{3\sigma}\right\}$$



- C_{pk} e PFE

Caso	(μ, σ)	C_{pk}	PFE (%)
(a)	(5; 1)	1,000	0,270
(b)	(6; 1)	0,667	2,278
(c)	(7; 1)	0,333	15,866
(d)	(8; 1)	0,000	50,000
(e)	**(9; 1)**	**–0,333**	**84,134**
(f)	**(10; 1)**	**–0,667**	**97,725**
(g)	(7; 0,5)	0,667	2,275
(h)	(6; 0,5)	1,333	0,003



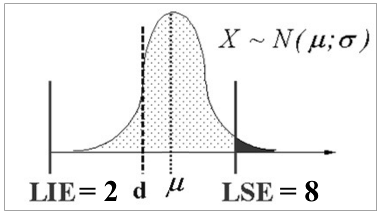
- Comentários – C_{pk}:
  - √ Penaliza os processos mais pela falta de centralidade que pela PFE
  - √ Assume valores negativos se μ não pertencer ao intervalo de especificação

    (casos *e* e *f*)
  - √ No caso de especificação unilateral, é calculado apenas com o limite existente

Índices de Capacidade do Processo – C_{pm}

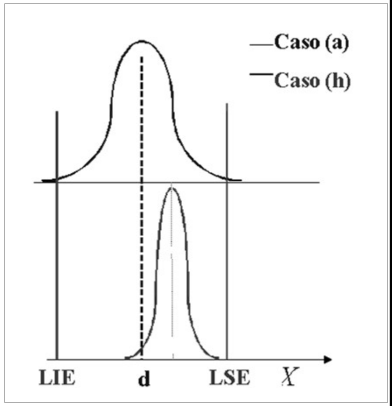
Caso	(μ, σ)	C_{pm}
(a)	(5; 1)	1
(b)	(6; 1)	$1/\sqrt{1+1}$
(c)	(7; 1)	$1/\sqrt{1+4}$
(d)	(8; 1)	$1/\sqrt{1+9}$
(e)	(9; 1)	$1/\sqrt{1+16}$
(f)	(10; 1)	$1/\sqrt{1+25}$
(g)	(7; 0,5)	$1/\sqrt{0,25+4}$
(h)	(6; 0,5)	$1/\sqrt{0,25+1}$

$$C_{pm} = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sqrt{\sigma^2 + (d-\mu)^2}}$$



- C_{pm} e PFE

Caso	(μ, σ)	C_{pm}	PFE (%)
(a)	(5; 1)	1,000	0,270
(b)	(6; 1)	0,707	2,278
(c)	**(7; 1)**	**0,447**	**15,866**
(d)	**(8; 1)**	**0,316**	**50,000**
(e)	(9; 1)	0,243	84,134
(f)	(10; 1)	0,196	97,725
(g)	(7; 0,5)	0,485	2,275
(h)	(6; 0,5)	0,894	0,003



- Comentários – C_{pm}:
  - √ $PFE_a > PFE_h$, mas o CP_m de *a* é menor que o de *h*
  - √ Penaliza os processos mais pela falta de centralidade que pela PFE
  - √ É mais coerente com a visão de Taguchi
    - existe "perda" crescente com o afastamento da característica em relação a seu valor-alvo
  - √ Não é coerente com a visão de que um item é conforme se o valor da característica de qualidade estiver entre LIE e LSE e não conforme, caso contrário
  - √ Não se aplica a especificação unilateral

- Valores de C_p, C_{pk} e C_{pm}
  - √ LIE=2 e LSE=8

Caso	(μ, σ)	C_p	C_{pk}	C_{pm}	PFE (%)
(a)	(5; 1)	**1**	1,000	1,000	0,270
(b)	(6; 1)	1	0,667	0,707	2,278
(c)	(7; 1)	1	0,333	0,447	15,866
(d)	(8; 1)	1	0,000	0,316	50,000
(e)	(9; 1)	1	–0,333	0,243	84,134
(f)	(10; 1)	1	–0,667	0,196	97,725
(g)	(7; 0,5)	2	0,667	0,485	2,275
(h)	(6; 0,5)	2	1,333	0,894	0,003

- Comparação de Casos – Comentários:
  - √ O índice C_p é insensível a mudanças na média do processo
    - casos: a – f e g – h
  - √ O índice Cpk assume valores negativos se a média do processo não pertencer ao intervalo da especificação
    - casos: e – f
  - √ Desvantagens do índice C_{pm}:
    - Podem apresentar valores muito diferentes em processos com mesma PFE
    - Processos com PFE's muito diferentes podem ter valores de C_{pm} muito próximos

Relação entre os Índices e a *PFE*

- A relação depende da distribuição da característica de qualidade
- Diferentes valores de C_{pm} podem corresponder a uma mesma PFE
  - √ casos b e g
- C_{pm} penaliza a falta de centralidade do processo
  - √ casos a e h: $C_{pma} < C_{pmh}$, embora $PFE_a < PFE_h$

Processos Capazes

- Seja X ~ N(d, σ_0)
  - √ Considere $C_p = C_{pk} = 1{,}33$, então:

$$C_{pk} = \frac{(\mathrm{LSE} - d)}{3\sigma} \Rightarrow 3C_{pk} = z \Rightarrow z = (3)(1{,}33) = 3{,}99$$

$$PFE = 2\,\mathrm{P}\{Z > 3{,}99\} = 0{,}00006 = 60\ ppm$$

  - √ Processos com $C_{pk} \geq 1{,}33$ são altamente capazes

Exemplo

- Considere uma causa especial que dobre o desajuste do processo (δ = 2)

$$C_{pk} = \frac{\text{LSE} - (d + 2\sigma)}{3\sigma} = \frac{\text{LSE} - d}{3\sigma} - \frac{2}{3}$$

$$C_{pk} = 0{,}667$$

- Classificação do Processo Quanto à sua Capacidade

Classificação	Valor de Cpk	Itens fora das especificações (ppm)	
		Centrado e bilateral[(1)]	Não-centrado e/ou unilateral[(2)]
Capaz	$C_{pk} \geq 1{,}33$	70	35
Razoavelmente capaz	$1 \leq C_{pk} \leq 1{,}33$	Entre 70 e 2700	Entre 35 e 1350
Incapaz	$C_{pk} < 1$	Mais de 2700	Mais de 1350

√ (1): Processo centrado e especificações bilaterais
- Índice apropriado: Cp = Cpk

√ (2): Processo não-centrado e especificações unilaterais
- Índice apropriado: Cpk

- Classificação de Processos – Considerações:
  - √ Processo razoavelmente capaz e sujeito à ocorrência de causas especiais frequentes
    - Deve ser **rigidamente** controlado
  - √ Processo incapaz produz um valor razoável de PFE mesmo se controlado
    - Ocorrência de causa especial é dramática

C_p e Falhas Associadas (ppm defeituosas)

Table 7-2 Values of the Process Capability Ratio (C_p) and Associated Process Fallout for a Normally Distributed Process (in Defective ppm) That Is in Statistical Control

PCR	Process Fallout (in defective ppm): One-Sided Specifications	Two-Sided Specifications
0.25	226,628	453,255
0.50	66,807	133,614
0.60	35,931	71,861
0.70	17,865	35,729
0.80	8,198	16,395
0.90	3,467	6,934
1.00	1,350	2,700
1.10	484	967
1.20	159	318
1.30	48	96
1.40	14	27
1.50	4	7
1.60	1	2
1.70	0.17	0.34
1.80	0.03	0.06
2.00	0.0009	0.0018

C_p – Valores Mínimos Recomendados

Table 7-3 Recommended Minimum Values of the Process Capability Ratio

	Two-Sided Specifications	One-Sided Specifications
Existing processes	1.33	1.25
New processes	1.50	1.45
Safety, strength, or critical parameter, existing process	1.50	1.45
Safety, strength, or critical parameter, new process	1.67	1.60

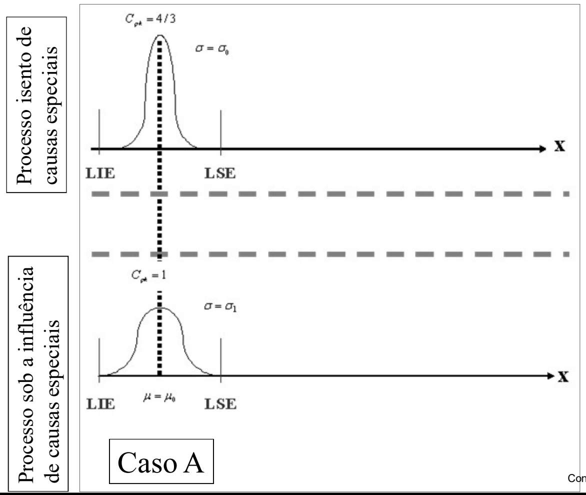
- Classificação de Processos: Ilustração
  - √ Processo capaz:
    - Motorista solitário em estrada com várias vias
    - Se cochilar, o máximo seria mudar de via
  - √ Processo razoavelmente capaz:
    - Idem, em uma estrada de via única, com acostamento
    - Se cochilar, sai para o acostamento. Se não se acordar logo, se acidenta
  - √ Processo incapaz:
    - Idem, em uma estrada de via única, sem acostamento
    - Se cochilar, sai da pista e se acidenta

Comportamento de Processos – Instabilidade e Desajuste

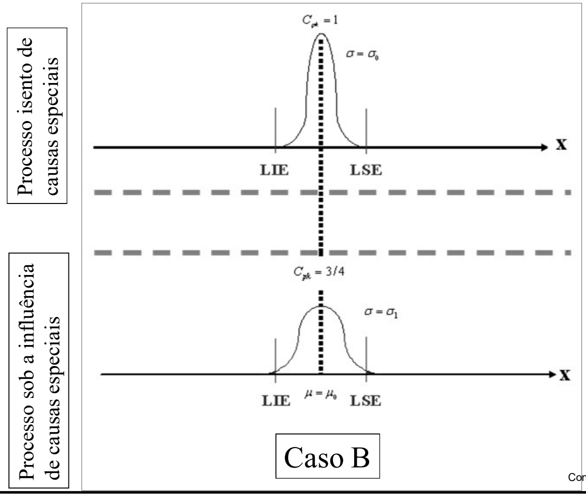
Processo	Isento de Causa Especial	C_p
A	Capaz	4/3
B	Razoavelmente Capaz	1
C	Incapaz	2/3

- Situação 1:
  - √ Causa especial altera variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$
- Situação 2:
  - √ Causa especial altera média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$
- Situação 3:
  - √ Causa especial altera média e/ou variabilidade do processo

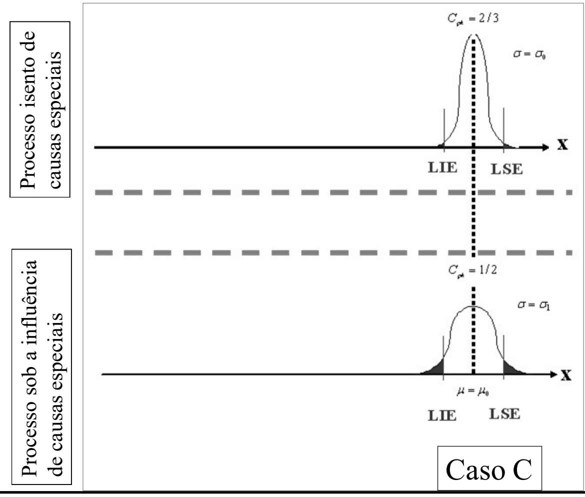
- Situação 1:
  - √ alteração variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$



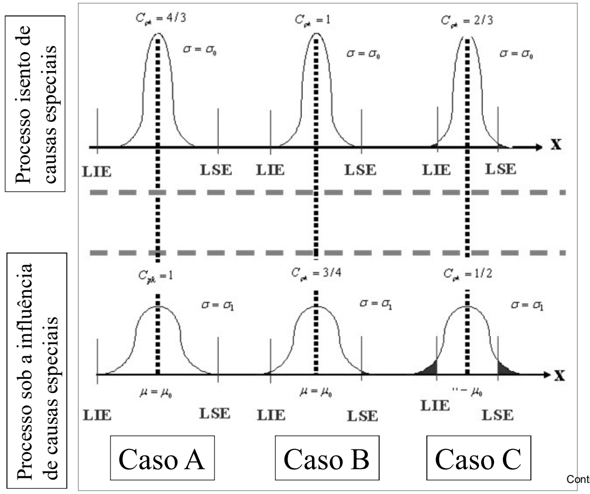
- Situação 1:
  - √ alteração variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$



- Situação 1:
  - √ alteração variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$



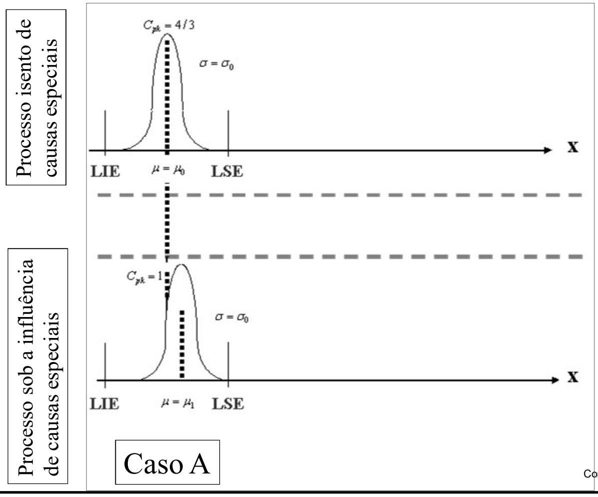
- Situação 1:
  - √ alteração variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$



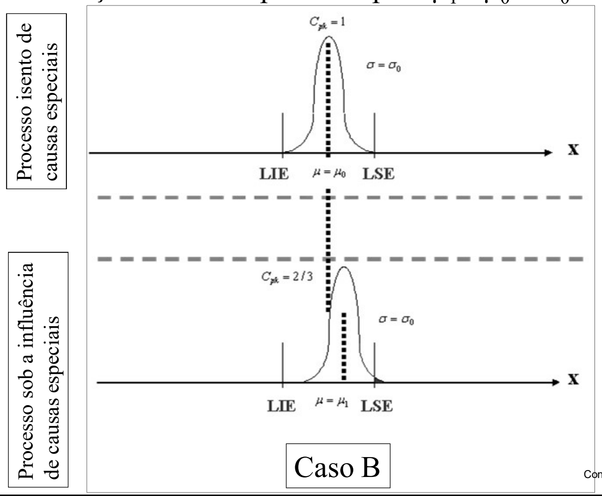
- Comportamento do Processo – Instabilidade:
  - √ Causa especial altera variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$

Caso	Isento Causa Especial	Sob Causa Especial
A	Capaz	Permanece capaz
B	Razoavelmente capaz	Torna-se incapaz
C	Incapaz	Continua incapaz, com aumento da PFE

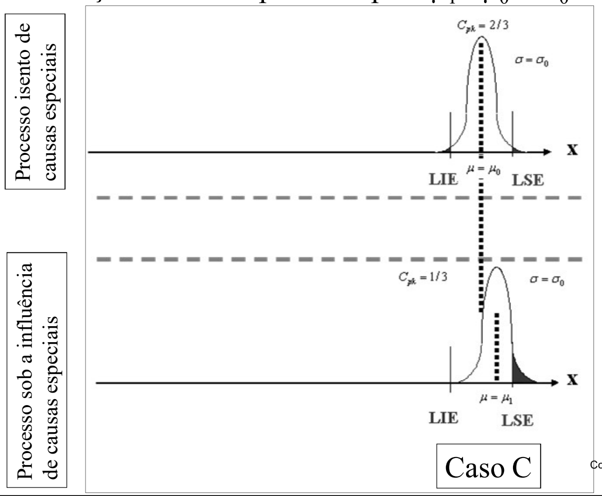
- Situação 2:
  - √ alteração média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$



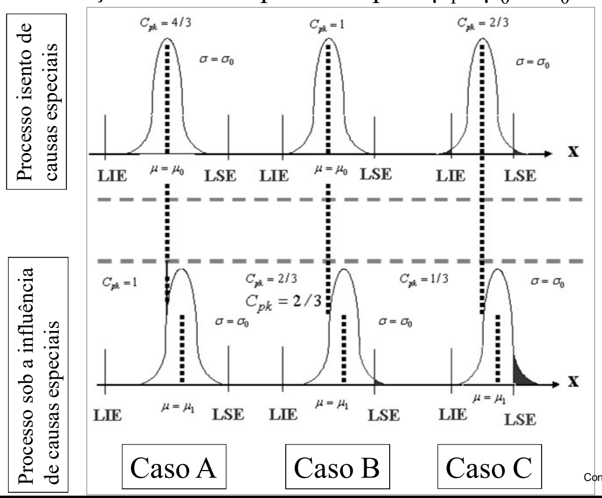
- Situação 2:
  - √ alteração média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$



- Situação 2:
  - √ alteração média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$



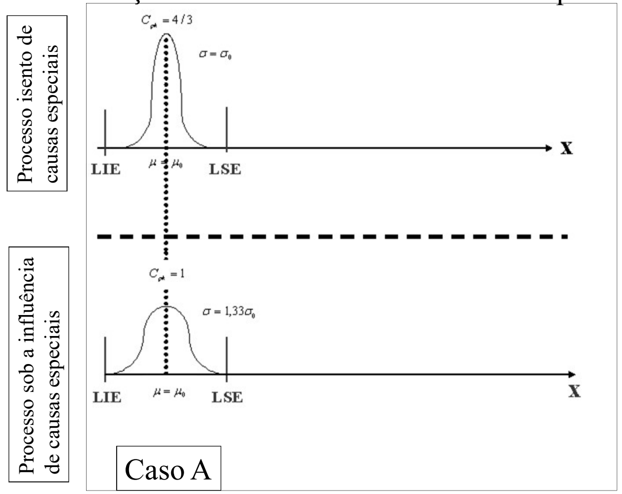
- Situação 2:
  - √ alteração média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$



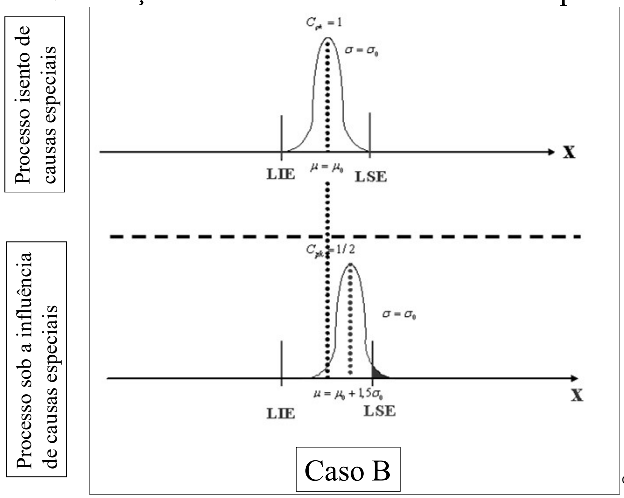
- Comportamento do Processo – Instabilidade:
  - √ Causa especial altera média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$

Caso	Isento Causa Especial	Sob Causa Especial
A	Capaz	Permanece capaz
B	Razoavelmente capaz	Torna-se incapaz
C	Incapaz	Continua incapaz, com aumento da PFE

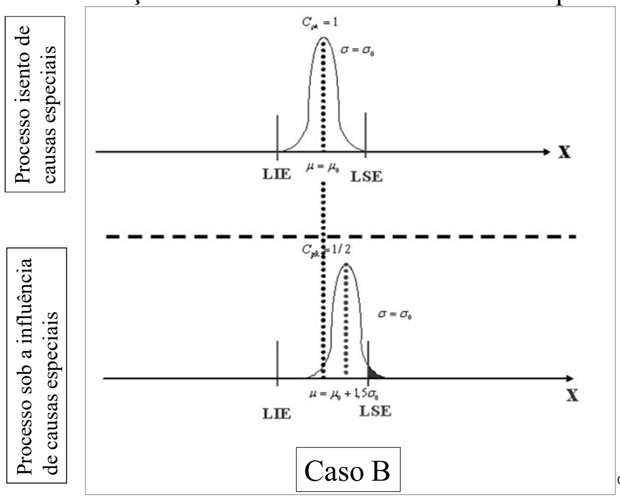
- Situação 3:
  - √ alteração da média e/ou variabilidade do processo



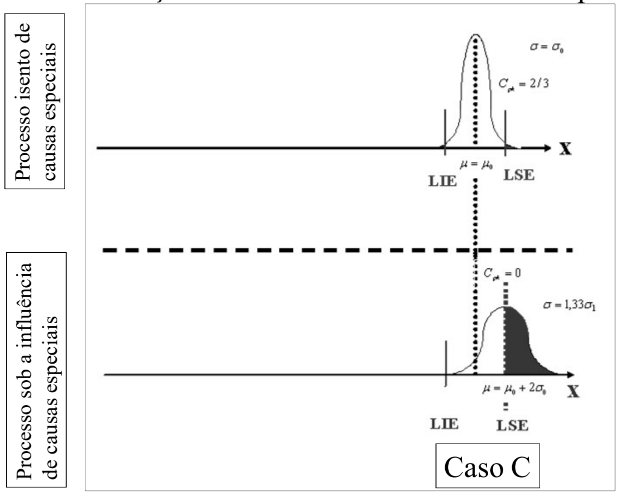
- Situação 3:
  - √ alteração da média e/ou variabilidade do processo



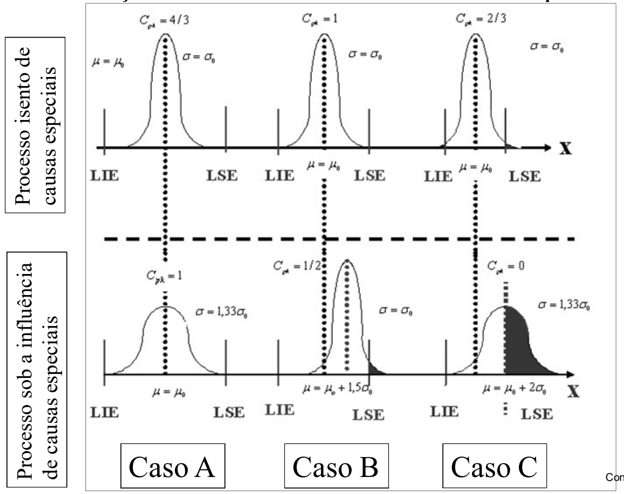
- Situação 3:
  - √ alteração da média e/ou variabilidade do processo



- Situação 3:
  - √ alteração da média e/ou variabilidade do processo



- Situação 3:
  - √ alteração da média e/ou variabilidade do processo



- Comportamento do Processo – Instabilidade:
  - √ A: Causa especial altera variabilidade para $\sigma_1 = 1{,}33\ \sigma_0$
  - √ B: Causa especial desloca média para $\mu_1 = \mu_0 + 1{,}5\ \sigma_0$
  - √ C: Causa especial altera $\mu_1 = \mu_0 + \sigma_0$ e $\sigma_1 = 1{,}33\sigma_0$

Caso	Isento Causa Especial	Sob Causa Especial
A	Capaz	Permanece capaz
B	Razoavelmente capaz	Torna-se incapaz
C	Incapaz	Continua incapaz, com aumento da PFE

- Comentários:
  - √ Um processo pode estar em controle e ser pouco capaz:
    - Caso C, antes da causa especial
  - √ Um processo pode estar fora de controle e ser capaz
    - Caso A, mesmo após causa especial
  - √ A causa especial sempre reduz a capacidade do processo
    - Deseja-se que o processo seja muito capaz
  - √ A folga ("excesso de capacidade") permite conviver mais tempo com causa especial
    - Poder do gráfico não é alto
    - Processo sujeito a combinação de causas especiais

Filosofia 6 σ

- Ideia:
  - √ Ter grande "folga" de capacidade ($C_p = 2$)

Intervalo de Confiança – C_p

$$\hat{C}_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6S} \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\chi^2_i \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_s \text{, com } \chi^2_i = \chi^2_{\alpha/2,(n-1)} \text{, e } \chi^2_s = \chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)}$$

$$\sqrt{\frac{\chi^2_i}{(n-1)S^2}} \le \frac{1}{\sigma} \le \sqrt{\frac{\chi^2_s}{(n-1)S^2}}$$

$$\hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_i}{(n-1)}} \le C_p \le \hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_s}{(n-1)}}$$

Exemplo

- Processo:
  - √ Especificações: LSE = 62 e LSI = 38
  - √ Amostra: 20
  - √ Estimativa Sigma do processo: 1,75
- Índice Capacidade do Processo: $\hat{C}_p = \frac{62-38}{6(1,75)} = 2,29$
- Percentis: $\chi^2_i = \chi^2_{0,05/2,(20-1)} = 8,91$, e $\chi^2_s = \chi^2_{(1-0,05/2),(20-1)} = 32,85$
- Intervalo com 95% de confiança para o C_p:

$$2,29\sqrt{\frac{8,91}{19}} \le C_p \le 2,29\sqrt{\frac{32,85}{19}} \qquad 1,57 \le C_p \le 3,01$$

Comentários

- Intervalo amplo (pouco informativo)
- S apresenta flutuação considerável em amostras pequenas ou mesmo moderadamente grandes
- Intervalos de confiança C_p baseados em pequenas amostras serão amplos
- Processo deve estar sob controle estatístico para que C_p tenha significado real
- Se o processo não está sob controle S e R/d_2 podem ser muito diferentes
  - √ Podem levar a valores diferentes de C_p

Teste de Hipóteses – C_p

- Exemplo motivador:
  - √ Exigência contratual de que fornecedor demonstre a capacidade de seu processo
- Hipóteses:
  - √ H_o: $C_p = C_{p0}$ (ou o processo não é capaz)
  - √ H_1: $C_p > C_{p0}$ (ou o processo é capaz)
- Teste estatístico sob hipótese de normalidade:
  - √ Estatística de teste: $\hat{C}_p$
  - √ Rejeita-se Ho se $\hat{C}_p$ estiver acima de valor crítico C

- Tabela de tamanhos amostrais e valores críticos (Kane, 1986)
  - √ C_p(alto): capacidade de um processo que aceitaríamos com probabilidade $1 - \alpha$
  - √ C_p(baixo): capacidade de um processo que rejeitaríamos com probabilidade $1 - \beta$

Exemplo de Uso da Tabela

- Fornecedor deve demonstrar que capacidade do processo supera $C_p = 1{,}33$
- Hipóteses:
  - √ H_o: $C_p = 1{,}33$
  - √ H_1: $C_p > 1{,}33$
- Estruturação do teste:
  - √ C_p(baixo)=1,33 ➔ P{detectar Cp<1,33} = 0,90
  - √ C_p(alto)=1,66 ➔ P{julgado capaz c/ Cp<1,66} = 0,90
  - √ α e β = 0,10

- Da tabela:

$$\frac{C_p(\text{alto})}{C_p(\text{baixo})} = \frac{1,66}{1,33} = 1,25 \quad \Rightarrow \quad n = 70 \text{ e } \frac{C}{C_p(\text{baixo})} = 1,10$$

- Determinação valor crítico do teste:

$$C = 1,10\, C_p(\text{baixo}) = 1,46$$

- Para demonstrar capacidade, fornecedor deve tomar amostra de 70 itens e C_p amostral deve ser maior que 1,46.

Intervalo de Confiança para C_{pk}

$$\hat{C}_{pk} = \min\left\{\frac{\text{LSE} - \bar{x}}{3S}; \frac{\bar{x} - \text{LIE}}{3S}\right\}$$

- Intervalo com αx100% de confiança, baseado em aproximação assintótica para a t não central
  - √ Bissel (1990)

$$\hat{C}_{pk} - \hat{C}_{pk}\sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)}} \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} + \hat{C}_{pk}\sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)}}$$

Limites de Especificação sobre Componentes

Fixação de Limites de Especificação

- Estudo da capacidade de processo para fixar especificações sobre componentes que interagem
- Importante em montagens complexas
- Importante para evitar empilhamento de tolerâncias

Combinações Lineares

- Dimensão de um item é combinação linear de dimensões de componentes
- Dimensão de montagem final

  $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$
- X_i são independentes com distribuição normal:

  $Y \sim \text{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\quad \mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \text{ e } \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$
- Se μ_i e σ_i^2 são conhecidos pode-se determinar a fração de itens montados que escapa às especificações

Exemplo – Montagem Final

- Comprimento final de montagem:

  $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
- Comprimentos de componentes (polegadas):
  - √ Independentes (máquinas diferentes)
  - √ Distribuição comprimento componentes

    $X_1 \sim N(2,0;\ 0,0004)$

    $X_2 \sim N(4,5;\ 0,0009)$

    $X_3 \sim N(3,0;\ 0,0004)$

    $X_4 \sim N(2,5;\ 0,0001)$
- Especificação sistema montado: $12,00 \pm 0,10$

- Média e variância montagem final:

$$\mu_Y = 12,0 \text{ e } \sigma_Y^2 = 0,0018$$

- Fração da montagem final dentro dos limites de especificação:

$$P\{11,90 \leq Y \leq 12,10\} = 0,981578$$

98,7% das montagens em cadeia estão dentro dos limites de especificação

Exemplo – Montagem

- Determinação dos limites de especificação componentes para que satisfação limites montagem
- Comprimento final de montagem:

  $Y = X_1 + X_2 + X_3$
- Comprimentos de componentes (polegadas):
  - √ Independentes (máquinas diferentes)
  - √ X_1, X_2 e X_3: distribuição normal com médias $\mu_1 = 1,00$, $\mu_2 = 3,00$ e $\mu_3 = 2,00$, respectivamente
- Quer-se $C_p = 1,5$ para a montagem final

- C_p equivale a cerca de *7 ppm* de defeituosos
- Limites naturais de tolerância para *7 ppm*:

$$\mu_Y \pm 4,49\sigma_Y$$

- Desvio-padrão da montagem final

$$\sigma_Y = \frac{0,06}{4,49} = 0,0314 \Rightarrow \sigma_Y \leq 0,0314$$

- Desvio-padrão dos componentes
  - √ Supondo-os iguais

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_Y^2}{3} = \frac{(0,0314)^2}{3} = 0,00006$$

- Se $\sigma^2 \leq 0{,}00006$ para cada componente, então os limites naturais de tolerância para a montagem final estarão dentro dos limites de especificação tais que $C_p = 1{,}50$

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \pm 3\sqrt{0,00006} = 1 \pm 0,0232 \\ X_2 &= 3 \pm 3\sqrt{0,00006} = 3 \pm 0,0232 \\ X_3 &= 2 \pm 3\sqrt{0,00006} = 2 \pm 0,0232 \end{aligned}$$

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapmann & Hall, 1993.