Gráfico de Controle por Atributos

Roteiro

Gráficos de Controle por Atributos

- São usados em processos que:
  - √ Produz itens defeituosos mesmo em controle
  - √ Produz itens com pequenos defeitos que podem ser sanados
  - √ Produz itens com alguns pequenos defeitos que não inutilizam o todo
- São muito usados em controle de qualidade de serviços

Principais Gráficos de Atributos

- Gráfico de controle do número de defeituosos (*np*)
- Gráfico de controle da fração defeituosa (*p*)
- Gráfico de controle do número de não-conformidades na amostra (*C*)
- Gráfico de controle do número médio de não-conformidades na amostra (*u*)

Gráfico de Controle de *np*

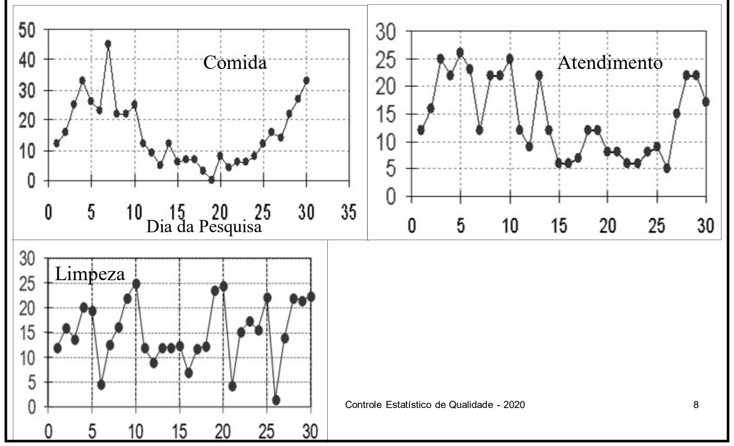
Exemplo

- Monitoramento de qualidade de serviço em um restaurante
  - √ Características da qualidade de interesse:
    - Comida
    - Atendimento
    - Limpeza
  - √ Pesquisa diária com 200 clientes sobre o grau de satisfação (Bom/Ruim)

Gráfico de *np*

- Monitora a quantidade de itens considerados não conformes em uma amostra de tamanho fixo (n)
- Situação geral:
  - √ Cada item pode ter várias características de qualidade que são examinadas simultaneamente
  - √ Item é classificado como defeituoso caso ele satisfaça o padrão de qualidade em uma ou mais dessas características

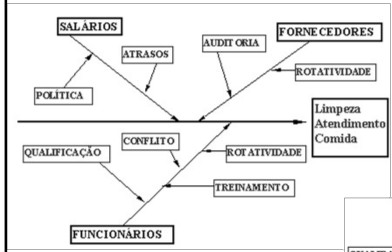
- Restaurante – Números de Clientes Insatisfeitos
  - √ Clientes pesquisados diariamente: 200

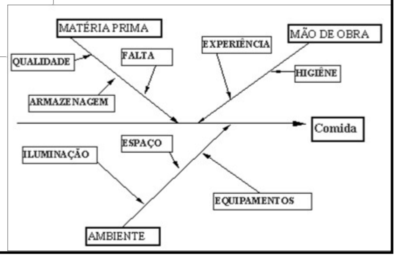


Comentários

- Comida:
  - √ qualidade deixou a desejar no 10 dias iniciais
  - √ Equilibrou-se, com piora gradativa a partir do 21º dia
- Atendimento:
  - √ Diminuiu a quantidade de insatisfação entre os 15º e 26º dias
- Limpeza:
  - √ Apresenta sazonalidade
    (redução da insatisfação a cada 5 dias)
- Processos encontram-se fora de controle

- Restaurante – Diagramas de Causa e Efeito

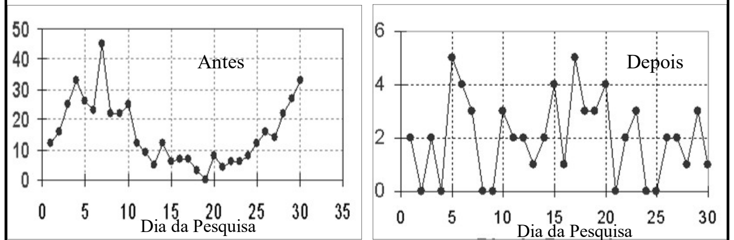




- Restaurante – Plano de ação

Causa Especial	Medida de Prevenção
Surgimento de insetos	Dedetização periódica
Matéria prima de má qualidade	Auditoria do fornecimento
Conflitos internos	Treinamento para trabalho em equipe

- Restaurante – Insatisfação com comida após ações para controlar do processo
  - √ Qte. clientes pesquisados: 200



  - √ Processo sob controle após melhorias

Modelo Probabilístico do Processo

√ Se processo opera de forma estável:
- É constante a probabilidade de que uma unidade não esteja de acordo com especificações (p)
- São independentes as sucessivas unidades produzidas

√ Amostra aleatória com n unidades amostrais

√ D_i: variável aleatória que conta quantidade de unidades amostrais não-conformes do produto da i-ésima amostra

√ Distribuição amostral de D_i:

$D_i \sim$ binomial (n, p)

Monitoramento do Processo – Fase 1

- Estimador de p (desconhecido) :

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} D_i}{mn}$$

√ $\hat{p}$: estimativa da probabilidade de defeituosos (p)

√ D_i: quantidade de defeituosos da i-ésima amostra

√ m: quantidade de amostras

√ n: tamanho da amostra

- Se m é grande ($m \geq 30$) então, com alta probabilidade, $\hat{p}$ estará próximo de p.

- Restaurante – Construção do Gráfico *np*

√ Banco de dados: *BD_CQI.xls*/ guia: *comida*

Dia	Insatisfação	Dia	Insatisfação	Dia	Insatisfação
1	2	11	2	21	0
2	0	12	2	22	2
3	2	13	1	23	3
4	0	14	2	24	0
5	5	15	4	25	0
6	4	16	1	26	2
7	3	17	5	27	2
8	0	18	3	28	1
9	0	19	3	29	3
10	3	20	4	30	1
	19		27		14

Insatisfação total = 60
Clientes pesquisados= 6000

√ Estimação do Parâmetro:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} D_i}{mn} = \frac{60}{(30)(200)} = 0,01$$

Número esperado de insatisfação
np= (200)(0,01)= 2,0 (p/dia)

Construção do Gráfico *np*

- D_i: Quantidade de defeituosos na amostra i
- $D_i \sim$ binomial (n, p)

√ p: fração de defeituosos do processo durante coleta amostra i

√ Os resultados devem ser independentes

(Restaurante: opinião de um cliente não pode interferir na opinião de outro)

√ Parâmetros de D_i:

$$\mu_D = np$$
$$\sigma_D^2 = np(1 - p)$$

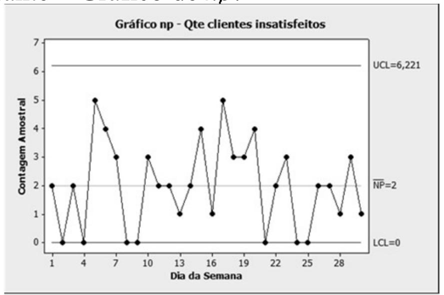
Gráfico de *np*

- Limites de Controle 3σ (exatos):

$$\begin{aligned} LSC_{np} &= np_0 + 3\sqrt{np_0(1-p_0)} \\ LM_{np} &= np_0 \\ LIC_{np} &= np_0 - 3\sqrt{np_0(1-p_0)} \end{aligned}$$

√ p_0: valor de p para processo sob controle
  - pode ser valor padrão especificado pela gerência
  - se for desconhecido, adota-se $\hat{p}$
- Se $LIC_{np} < 0$, adota-se $LIC_{np} = 0$

- Restaurante – Gráfico de *np*:



- Estimativas (p_0 = 0,01)

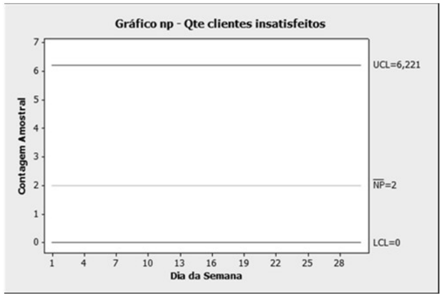
$$\begin{aligned} LSC_{np} &= n\hat{p}_0 + 3\sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} = 200(0,01) + 3\sqrt{200(0,01)(1-0,01)} = 6,221 \\ LM_{np} &= n\hat{p}_0 = 200(0,01) = 2,000 \\ LIC_{np} &= n\hat{p}_0 - 3\sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} = 200(0,01) - 3\sqrt{200(0,01)(1-0,01)} = -2,221 \\ LIC_{np} &= 0 \end{aligned}$$

- Comentários:

√ O processo está em estado de controle estatístico
  - Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média

√ Se mais de 6 clientes mostrarem-se insatisfeitos com a comida, deve-se buscar causas especiais

- Restaurante – Gráfico de *np* para monitoramento do processo (Fase 2)



Análise de Desempenho de Gráficos *np*

- Hipóteses associadas;
  - √ H_0: $p = p_0$ vs. H_1: $p \neq p_0$
- Comentários:
  - √ Identificação de causas especiais para eliminação
    - Hipótese unilateral
  - √ Identificação de causas especiais benéficas:
    - Hipótese bilateral

Riscos

$$\alpha = 1 - P\{LIC_{np} \leq D \leq LSC_{np} \mid p = p_0\}$$
$$\beta = P\{LIC_{np} \leq D \leq LSC_{np} \mid p = p_1\}$$

√ Limites 3σ são demasiados estreitos
- Alarmes falsos com frequência maior que a 'nominal' (α = 0,0027)

- Cálculo de probabilidades para o gráfico de *np*
  - √ Probabilidades calculadas pela binomial
  - √ Podem ser aproximadas pela Poisson ($p \leq 0{,}10$ e $n \geq 50$).
  - √ Função de distribuição acumulada da Poisson (Tabela C)

$$\mathrm{P}\{D \leq d|\lambda\} = \sum_{x=0}^{d} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

- Exemplo de cálculo de α e β
  - √ $LSC = 3{,}98$ e $n = 100$ (para $p_0 = 0{,}01$):

$$\alpha = 1 - \mathrm{P}\{D \leq 3 \mid \lambda = 1\} = 1 - 0{,}9810 = 0{,}019$$
$$CMS_0 = 52{,}6$$

  - √ Nessa situação, para $p_1 = 0{,}02$

$$\beta = \mathrm{P}\{D \leq 3 \mid \lambda = 2\} = 0{,}857$$

  - √ Toma-se $LSC = 4{,}50$ para reduzir α

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \mathrm{P}\{D \leq 4 \mid \lambda = 1\} \\ &= 1 - 0{,}963 = 0{,}0037 \\ CMS_0 &= 270{,}27 \end{aligned}$$

Gráfico de *np* – Análise de Sensibilidade

$$\alpha = 1 - P\{LIC_{np} \le D \le LSC_{np} \mid p = p_0\}$$
$$\beta = P\{LIC_{np} \le D \le LSC_{np} \mid p = p_1\}$$

Valores de α e β para n = 100 e LSC = 3,98

	Exata	Aproximação pela Poisson			
p	P{$D \le 3$}	$\lambda = np$	P{$D \le 3$}	α	β
0,01	0,9816	1	0,9810	0,019	
0,02	0,8590	2	0,8571		0,857
0,03	0,6472	3	0,6472		0,647
0,05	0,2578	5	0,2650		0,265
0,10	0,0078	10	0,0103		0,010

Comparação de planejamentos

	n = 100 e LSC = 4,50				n = 200 e LSC = 6,20			
p	λ=np	P{D≤4}	α	β	λ=np	P{D≤6}	α	β
0,01	1	0,996	**0,004**		2	0,995	**0,005**	
0,02	2	0,947		0,947	4	0,889		0,889
0,03	3	0,815		**0,815**	6	0,606		**0,606**
0,05	5	0,440		0,440	10	0,130		0,130
0,10	10	0,029			20	0		0

	n = 100 e LSC = 3,98			
p	$\lambda = np$	P{$D \le 3$}	α	β
0,01	1	0,9810	**0,019**	
0,02	2	0,8571		0,857
0,03	3	0,6472		**0,647**
0,05	5	0,2650		0,265

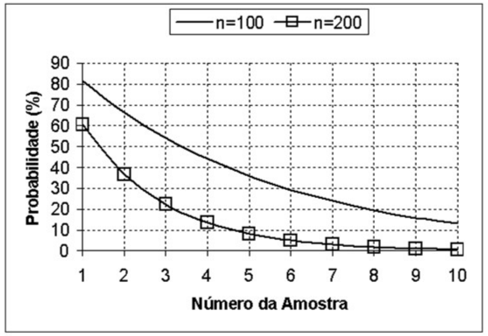
Curva de Probabilidade de Não Detecção

- Comparação das velocidades de alerta para p fixo
  - √ Probabilidade de não ocorrer alarme até amostra
- Exemplo:
  - √ p = 3%
  - √ Planejamentos:

	n	LSC	α
1	100	4,5	0,004
2	200	6,2	0,005

  - √ Volume de inspeção (taxa de amostragem) do planejamento 2 é o dobro do planejamento 1

- Curvas de Probabilidades de Não-Detecção (p=3%)



- Determinação gráfico *np* para α e β fixos:
  - √ Supondo-se LIC = 0

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathrm{P}\{D \le LSC \mid p = p_0\} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor LSC \rfloor} \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} \\
\beta &= \mathrm{P}\{D \le LSC \mid p = p_1\} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor LSC \rfloor} \binom{n}{j} p_1^j (1-p_1)^{n-j}
\end{aligned}
$$

  - √ Para α e β não exceder valores especificados:
    - Utilizar *n* e *LSC* que satisfaçam as duas equações
    - Solução não é trivial

- Roteiro para solução analítica:
  - √ (pela função de distribuição acumulada da Poisson)
  - √ Dados α e β:
    - Escolher um valor inicial para d (d_0);
    - Procurar p_{ac}^0, tal que $p_{ac}^0 \geq 1-\alpha$ e ler o valor de λ correspondente (λ_0);
    - Calcular $n = \frac{\lambda_0}{p_0}$;
    - Calcular $\lambda_1 = np_1$;
    - Procurar p_{ac}^1 para λ_1 e d_0;
    - Se $p_{ac}^1 = \beta$ ou pouco menor , a solução foi encontrada;
      Se $p_{ac}^1 > \beta$, aumente d_0 e reinicie;
      Se $p_{ac}^1 \ll \beta$, diminua d_0 e reinicie.
    - Encontrada a solução, usar $LSC = d_o + 0,5$

- √ Este algoritmo nem sempre leva a uma solução ótima
- √ Leva a uma boa solução!
  - *LSC* da solução ótima
  - *n* um pouco maior que o da solução ótima

Exemplo

- Determinação parâmetros de planejamento de gráfico de controle de *np* (α e β especificados):
  - √ p_0 = 0,01; α ≤ 0,002 e p_1 = 0,05; β ≤ 0,50
  - √ Escolhido d_0 = 3

$$n = \frac{\lambda_0}{p_0} \qquad \alpha_i = 1 - \mathrm{P}\{D \le d_i \mid \lambda = \lambda_0\} \qquad \beta_i = \mathrm{P}\{D \le d_i \mid \lambda = \lambda_1\}$$

	Aproximação pela Poisson					
d	$P_{ac}^0(=\alpha)$	λ_0	n	$\lambda_1=np$	$P_{ac}^1(=\beta)$	Status
3	0,9982	0,50	50	2,50	0,7578	>0,5
4	0,9982	0,85	85	4,25	0,5801	>0,5
5	0,9985	1,20	120	6,00	0,4457	Solução

  - √ Solução: LSC = 5,5 e *n* = 120

- Uso de planilha Excel para busca de boa solução:
  - √ $n = 50$

Determinação Parâmetros do Gráfico de *np*

Entradas	p_0 =	0,01		p_1 =	0,05
	alpha =	0,002		beta =	0,5

n = 50

d =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alfa =	-	-	-	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
beta =	0,077	0,279	-	-	-	-	-	-	-	-

  - √ $n = 120$

Determinação Parâmetros do Gráfico de *np*

Entradas	p_0 =	0,01		p_1 =	0,05
	alpha =	0,002		beta =	0,5

n = 120

d =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alfa =	-	-	-	-	-	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
beta =	0,002	0,016	0,058	0,144	0,278	0,442	-	-	-	-

- Refinando a busca de uma boa solução:
  - √ $n = 114$ (proximidades de 120)

Determinação Parâmetros do Gráfico de *np*

Entradas	p_0 =	0,01		p_1 =	0,05
	alpha =	0,002		beta =	0,5

n = 114

d =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alfa =	-	-	-	-	-	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
beta =	0,003	0,020	0,072	0,173	0,321	0,492	-	-	-	-

  - √ Comparação com solução dada pro algoritmo:
    - Mesmo limite ($LSC = 5$)
    - Tamanho amostral um pouco menor ($n = 114$)

Gráfico de Controle de *p*

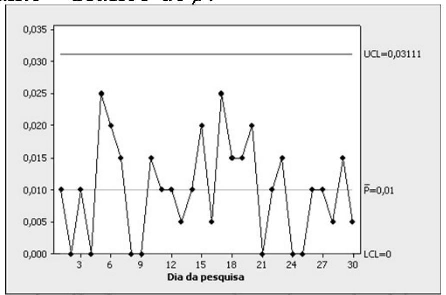
Gráfico de *p*

- Característica da qualidade de interesse:
  - √ Proporção de itens defeituosos produzidos pelo processo (fração não-conforme)
  - √ Fração não conforme da amostra i: D_i/n_i
- Limites de Controle 3σ (exatos):

$$
\begin{aligned}
LSC_p &= p_0 + 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \\
LM_p &= p_0 \\
LIC_p &= p_0 - 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}
\end{aligned}
$$

  - √ Dividir por n os limites de controle do gráfico np

- Restaurante - Gráfico de p:



- Estimativa dos limites para padrão desconhecido (p_0 = 0,01)

$$
\begin{aligned}
LSC_p &= \hat{p}_0 + 3\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} = 0,01 + 3\sqrt{\frac{(0,01)(1-0,01)}{200}} = 0,031 \\
LM_p &= \hat{p}_0 = 0,01 \\
LIC_p &= \hat{p}_0 - 3\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} = 0,01 - 3\sqrt{\frac{(0,01)(1-0,01)}{200}} = 0,011 \\
LIC_p &= 0
\end{aligned}
$$

- Comentários:
  - √ O processo está em estado de controle estatístico
    - – Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média
  - √ Se a proporção de clientes insatisfeitos com a comida for maior que 0,031, deve-se buscar causas especiais

Gráfico de *np* & Gráfico de *p*

- Para um mesmo valor de n, o gráfico de p equivale ao gráfico de np
  - √ Diferem apenas na escala do eixo vertical
- LM_p indica diretamente o nível de qualidade do processo
- Opta-se pelo gráfico de p quando o tamanho da amostra não pode ser mantido constante

Variação do Tamanho Amostral

- Quando n varia, o gráfico apresentará vários limites de controle
- Se a variação for pequena, pode-se adotar os limites na maior amostra
  - √ Sempre que um ponto cair na região de ação do gráfico, compara-se seu valor com o limite exato
  - √ (considerar tamanho da amostra que gerou o ponto)

- Estimador de p_0 (desconhecido)

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} D_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

√ n_i: tamanho da *i*-ésima amostra

√ D_i: quantidade de defeituosos da *i*-ésima amostra

Exemplo

- Processo que quando isento de causa especial produz 5% de defeituosos

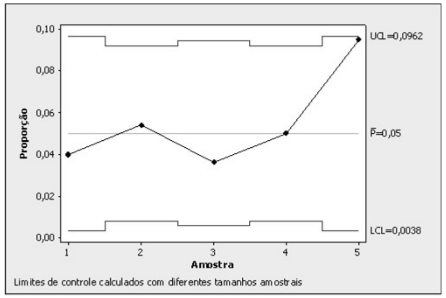
√ Amostras de tamanhos variáveis

√ Limite de controle superior: $LSC_p = 0,05 + 3\sqrt{\frac{(0,05)(1-0,05)}{n}}$

√ Cálculos limites de controle:

		$p_0 =$	0,05		
Amostra	n_i	D_i	p_i	LIC_p	LSC_p
1	200	8	0,0400	0,0038	0,0962
2	240	13	0,0542	0,0078	0,0922
3	220	8	0,0364	0,0059	0,0941
4	240	12	0,0500	0,0078	0,0922
5	200	19	0,0950	0,0038	0,0962

- Gráfico *p* com limites variáveis



Gráficos de *p* – Tamanho Amostral Variável

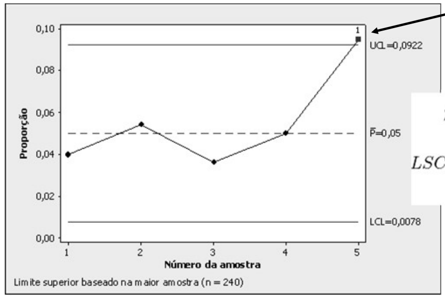
- Pode-se construir o gráfico *p* com base na maior amostra

√ $n = 240$

- A abertura do gráfico é conservativa
- Caso haja sinal de alarme

√ Comparar o valor de $\hat{p}_i$ com os limites de controle exatos

- Gráfico de p com limite superior fixo:



$$\hat{p}_5 = \frac{D_5}{n_5} = \frac{19}{200} = 0,095$$
$$LSC_{p_5} = 0,05 + 3\sqrt{\frac{(0,05)(1-0,05)}{200}} = 0,0962$$

√ Não se confirma o alarme pois $\hat{p}_5 < LSC_{p5}$

Gráfico de Controle de *C*

Gráfico de Controle de *C*

- Também conhecido como gráfico do número de não-conformidades (ou de defeitos)
  - √ Mostra o número de não conformidades na amostra
  - √ Produtos com muitos componentes
    - Número de não-conformidades para monitorar o processo (medida de qualidade é a freqüência média de defeitos)

- Unidade de inspeção:
  - √ Quantidade básica de produto em que a frequência de defeitos é expressa
- Tamanho amostral n não é necessariamente inteiro
  - √ Condicionado ao custo, poder desejado, etc.
- Processo sob controle
  - √ Espera-se que as não-conformidades ocorram de maneira aleatória e com baixa frequência

Modelo Probabilístico

C: Qte. de não-conformidades por unidade de inspeção

√ Espera-se que C ~ Poisson (l)

λ: média de não-conformidades por amostra

$$\Pr\{C = x\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

√ Suposições:

- independência na ocorrência de não-conformidades
- evento raro associado à não-conformidade com uma infinidade de chances de ocorrências

√ Parâmetros de *C*:

$\mu_C = \sigma_C^2 = \lambda$

Gráfico de *C*

- Limites de Controle 3σ (exato):

$$\begin{aligned} LSC_C &= \lambda_0 + 3\sqrt{\lambda_0} \\ LM_C &= \lambda_0 \\ LIC_C &= \lambda_0 - 3\sqrt{\lambda_0} \end{aligned}$$

√ λ_0: média de não-conformidades por amostra com o processo sob controle

- Quantidades amostrais:
  - √ *u*: número médio de não-conformidades por unidade de inspeção
  - √ *n*: quantidade de unidades de inspeção na amostra
  - √ λ: média de não-conformidades por amostra

  $\lambda = n\,u$
- Estimativa de λ_0 (desconhecido)
  - √ $\bar{u}$ estima u_0 e $\bar{C} = n\,\bar{u}$ estima λ_0, já que $\lambda_0 = n\,u_0$

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{mn}$$

- Limites de Controle 3σ (estimados)

$$\begin{aligned} LSC_C &= \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} \\ LM_C &= \bar{C} \\ LIC_C &= \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} \end{aligned}$$

Exemplo – Produção de Geladeiras

- Não-conformidades em 40 amostras de 5 geladeiras
  - √ Banco: *BD_CQI.xls*/guia: *geladeiras*

Amostra	C_i	Amostra	C_i	Amostra	C_i	Amostra	C_i
1	2	11	5	21	1	31	5
2	4	12	4	22	5	32	1
3	2	13	2	23	2	33	2
4	0	14	4	24	6	34	1
5	3	15	5	25	3	35	6
6	1	16	1	26	2	36	2
7	2	17	1	27	3	37	1
8	4	18	1	28	0	38	2
9	2	19	1	29	3	39	4
10	2	20	3	30	1	40	1

  - √ unidade inspeção: 1 geladeira
  - √ Tamanho amostra: $n = 5$
  - √ Quantidade de amostras: $m = 40$

- Geladeiras – Estimação Parâmetros
  - √ Quantidade de defeitos em 40 amostras ($m = 40$)

$$\sum_{i=1}^{40} C_i = 100$$

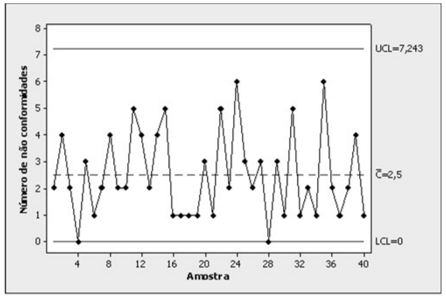
  - √ $\bar{u}$: número médio de não-conformidades por unidade de inspeção (por geladeira)

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^{40} C_i}{(40)(5)} = \frac{100}{200} = 0,5$$

  - √ $\bar{c}$: número médio de não-conformidades por amostra (por 5 geladeiras)

$$\bar{c} = n\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{m} = \frac{200}{40} = 2,5$$

- Geladeiras – Gráfico de Controle de C:



- Estimativas dos Limites de Controle

$$\begin{aligned} LSC_C &= \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 2,5 + 3\sqrt{2,5} = 7,243 \\ LM_C &= \bar{C} = 2,5 \\ LIC_C &= \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 2,5 - 3\sqrt{2,5} = -2,243 \\ LIC_C &= 0 \end{aligned}$$

- Comentários:
  - √ O processo está em estado de controle estatístico
    - – Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média
  - √ Hipóteses:
    - – H_0: $u = 0,5$ *vs*. H_1: $u \neq 0,5$ para $n = 5$, $LSC_C = 7,24$
  - √ Distribuição admitida para as não-conformidades:
    - – $C_i \sim$ Poisson (λ_0), com $\lambda_0 = 5 \times 0,5 = 2,5$

Cálculo do Risco α

- Para LSC = 7,24 e λ_0 = 2,5

$$\alpha = 1 - \mathrm{P}\{C_i \le 7 \mid \lambda_0 = 2{,}5\} = 1 - 0{,}99957$$
$$= 0{,}0043$$

- Risco α para gráficos de C, com u_0 = 0,5

n	$\lambda_0 = nu_0$	LSC	α (%)
1	0,5	2,62	1,5
5	2,5	7,24	0,4
10	5,0	11,70	0,5

$$LSC = \lambda_0 + 3\sqrt{\lambda_0}$$

Poder do Gráfico de *C*

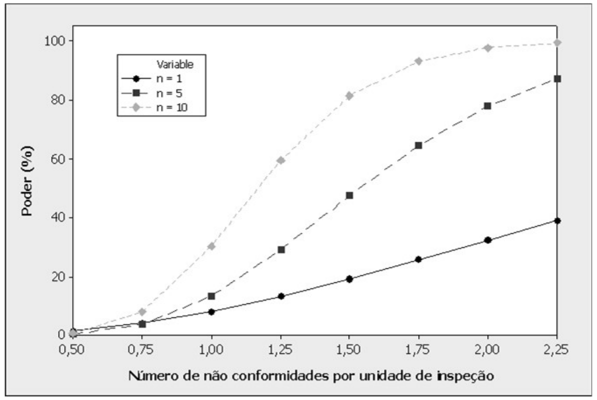
- Para u_1=2, tem-se λ_1 = (2)(5)=10

$$P_d = \mathrm{P}\{C_i > 7 \mid \lambda_1 = 10\}$$
$$= 1 - 0{,}2202 = 0{,}779$$

- Poder para gráficos de C, com u_0=0,5

	n = 1		n = 5		n = 10	
	LSC_C = 2,62		LSC_C = 7,24		LSC_C = 11,70	
u_1	λ_1	P{C > 2}	λ_1	P{C > 7}	λ_1	P{C > 11}
1,0	1,0	0,0803	5,0	0,1334	10,0	0,3032
1,5	1,5	0,1912	7,5	0,4754	15,0	0,8152
2,0	2,0	0,3233	10,0	0,7798	20,0	0,9786

- Poder do Gráfico de Controle de *C*:



- Determinação gráfico de *C* para α e β fixos:
  - √ Supondo-se LIC = 0

$$1-\alpha = \mathrm{P}\{C_i \le LSC \mid \lambda = \lambda_0\} = \sum_{j=0}^{\lfloor LSC \rfloor} \frac{e^{-\lambda_0}\lambda_0^{\,j}}{j!}$$
$$\beta = \mathrm{P}\{C_i \le LSC \mid \lambda = \lambda_1\} = \sum_{j=0}^{\lfloor LSC \rfloor} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{\,j}}{j!}$$

  - √ Para α e β não exceder valores especificados:
    - Utilizar *n* e *LSC* que satisfaçam as duas equações
    - Solução não é trivial

- Roteiro para solução analítica:
  - √ Pela função de distribuição acumulada da Poisson
  - √ Dados α e β:
    - Arbitre um valor para n e calcule $\lambda_0 = nu_0$;
    - Procurar p^0_{ac}, tal que $p^0_{ac} \geq 1 - \alpha$ e ler o valor de d_0 correspondente;
    - Calcular $\lambda_1 = nu_1$;
    - Procurar p^1_{ac} para λ_1 e d_0;
    - Se $p^1_{ac} = \beta$ ou pouco menor , a solução foi encontrada;
      Se $p^1_{ac} > \beta$, aumente d_0 e reinicie;
      Se $p^1_{ac} \ll \beta$, diminua n e reinicie.
    - Encontrada a solução, usar $LSC = d_o + 0,5$

√ Este algoritmo nem sempre leva a uma solução ótima

√ Leva a uma boa solução!
- *LSC* da solução ótima
- *n* um pouco maior que o da solução ótima

Exemplo

- Processo sob controle
  - √ Média de não-conformidades por unidade de inspeção
  - √ $u_0 = 0,5$
- Requisitos:
  - √ Risco α: 0,2%
  - √ Poder: 0,50 (detectar mudança do nível de não-conformidade por unidade de inspeção para u_1=2,0)
- Determinar:
  - √ tamanho amostral (*n*)
  - √ limite superior de controle (LSC_C)

Exemplo

- Determinação parâmetros de planejamento de gráfico de controle de *C* (α e β especificados):
  - √ $u_0 = 0,5$; $\alpha \leq 0,002$ e $u_1 = 2,0$; $\beta \leq 0,50$

	Aproximação pela Poisson				
n	λ_0=nu_0	d_0	λ_1=nu_1	P_{ac}^1(=β)	Status
2	1,0	5	4,0	0,785	> 0,5
3	1,5	6	6,0	0,606	> 0,5
4	2,0	7	8,0	0,453	**Solução**

√ Solução: LSC = 7,5 e *n* = 4

- Passo 1
  - √ Adotando $n = 2$

$$\lambda_0 = 2 \times 0,5 = 1;$$

$$p_{ac}^0 = P\{C_i \leq 5 | \lambda_0 = 1\} = 0,999 > 0,998;$$

$$\lambda_1 = n \times u_1 = 2 \times 2 = 4;$$

$$p_{ac}^1 = P\{C_i \leq 5 | \lambda_1 = 4\} = 0,785;$$

  - √ $p_{ac}{}^1 > \beta$, adotar $n = 3$

- Passo 2
  - √ Adotando $n = 3$

$$\lambda_0 = 3 \times 0,5 = 1,5;$$

$$p_{ac}^0 = P\{C_i \leq 6 | \lambda_0 = 1\} = 0,999 > 0,998;$$

$$\lambda_1 = 3 \times 2 = 6;$$

$$p_{ac}^1 = P\{C_i \leq 6 | \lambda_1 = 6\} = 0,606;$$

  - √ $p_{ac}{}^1 > \beta$, adotar $n = 4$

- Passo 3
  - √ Adotando $n = 4$

$$\lambda_0 = 4 \times 0,5 = 2;$$

$$p_{ac}^0 = P\{C_i \leq 7 | \lambda_0 = 2\} = 0,999 > 0,998;$$

$$\lambda_1 = 4 \times 2 = 8;$$

$$p_{ac}^1 = P\{C_i \leq 7 | \lambda_1 = 8\} = 0,453;$$

  - √ $p_{ac}{}^1 < \beta$, solução encontrada!
- Solução:
  - √ $n = 4$
  - √ $LSC_C = 7,5$

- Uso de planilha Excel para busca de boa solução:
  - √ $n = 4$

Determinação Parâmetros do Gráfico de *C*

Entradas	u_0 =	0,5	u_1 =	2
	alpha =	0,002	beta =	0,5
n =	4	λ_0 =	2	λ_1 = 8

d =	0	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
alfa =	-	-	-	-	-	-	-	**0,001**	0,000	0,000	0,000
beta =	0,000	0,003	0,014	0,042	0,100	0,191	0,313	**0,453**	-	-	-
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Gráfico de Controle de *u*

Gráfico de Controle de *u*

- Gráfico do número de não-conformidades por unidade de inspeção
  - √ Também usado para amostras de tamanho variável
- Pontos do gráfico (u_i): $u_i = \dfrac{C_i}{n_i}$
- Parâmetros da distribuição de Ui (sob controle)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U_i) &= \mathrm{E}\left(\frac{C_i}{n_i}\right) = u_0 \\ \mathrm{Var}(U_i) &= \mathrm{Var}\left(\frac{C_i}{n_i}\right) = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{C_i}{n_i}\right)}{n_i} \\ \sigma(U_i) &= \sqrt{\frac{u_o}{n_i}} \end{aligned}$$

Construção do Gráfico de *u*

- Limites de Controle 3σ (exatos):

$$\begin{aligned} LSC_{u_i} &= u_0 + 3\sqrt{\frac{u_o}{n_i}} \\ LM_{u_i} &= u_0 \\ LIC_{u_i} &= u_0 - 3\sqrt{\frac{u_o}{n_i}} \end{aligned}$$

  - √ u_0: valor de *u* para processo sob controle
    - pode ser valor padrão especificado pela gerência
    - se for desconhecido, adota-se $\bar{u}$, estimado com base em m amostras iniciais de tamanho variável

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

  - √ LM_u é fixo e os limites variam de acordo com o tamanho amostral

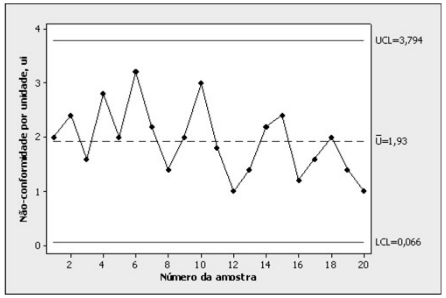
Exemplo

- Fabricação de PC's:
  - √ Inspeção de produto acabado com 20 amostras de 5 computadores (m = 20 e n = 5)
  - √ Banco de dados: *BD_CQI.xls*/guia: *computadores*

Número da amostra	Tamanho amostral	Qte. Defeitos por amostra (C_i)	Média defeitos por unidade (u_i)
1	5	10	2,00
2	5	12	2,40
3	5	8	1,60
4	5	14	2,80
5	5	10	2,00
6	5	16	3,20
7	5	11	2,20
8	5	7	1,40
9	5	10	2,00
10	5	15	3,00
11	5	9	1,80
12	5	5	1,00
13	5	7	1,40
14	5	11	2,20
15	5	12	2,40
16	5	6	1,20
17	5	8	1,60
18	5	10	2,00
19	5	7	1,40
20	5	5	1,00
Total	**100**	**193**	**1,93**

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{20} C_i}{\sum_{i=1}^{20} n_i} = \frac{193}{100} = 1,93$$

- Computadores – Gráfico de Controle de u:



- Estimativas dos Limites de Controle

$$
\begin{aligned}
LSC_u &= \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,93 + 3\sqrt{\frac{1,93}{5}} = 3,794 \\
LM_u &= \bar{u} = 1,93 \\
LIC_u &= \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,93 - 3\sqrt{\frac{1,93}{5}} = 0,066
\end{aligned}
$$

Amostra de Tamanho Variável – Procedimento

- Coleta de amostras para gráficos de controle para não-conformidades pode ocorrer por meio de inspeção 100% do produto
  - √ Quantidade de unidades de inspeção por amostra poderá ser variável
  - √ Correto seria usar gráfico de controle por unidade (u)
    - linha central constante
    - limites de controle variando inversamente com $\sqrt{n_i}$

Exemplo

- Defeitos em Tecido Tingido:
  - √ Inspeção de defeitos a cada 50 m², em 10 rolos de tecido tingido
    - unidade de inspeção: 50 m² de tecido; $m = 10$

Número do rolo	Área do rolo (m^2)	Qte. Defeitos por amostra (C_i)	Qte. unidades de inspeção por rolo	Média defeitos por unidade (u_i)
1	500	14	10,0	1,40
2	400	12	8,0	1,50
3	650	20	13,0	1,54
4	500	11	10,0	1,10
5	475	7	9,5	0,74
6	500	10	10,0	1,00
7	600	21	12,0	1,75
8	525	16	10,5	1,52
9	600	19	12,0	1,58
10	625	23	12,5	1,84
Total	**5.375**	**153**	**107,5**	**1,42**

Unidade de inspeção: áreas de 50 m^2

Tamanho da amostra
Não é inteiro!

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{10} C_i}{\sum_{i=1}^{10} n_i} = \frac{153}{107,5} = 1,423$$

- Estimação dos Limites de Controle – Gráfico de u

$$
\begin{aligned}
LSC_{u_i} &= \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \\
LM_{u_i} &= \bar{u} \\
LIC_{u_i} &= \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}
\end{aligned}
$$

Rolo	Amostra	Limites	
(i)	(n_i)	Inferior	Superior
1	10,0	0,291	2,555
2	8,0	0,158	2,689
3	13,0	0,431	2,416
4	10,0	0,291	2,555
5	9,5	0,262	2,584
6	10,0	0,291	2,555
7	12,0	0,390	2,456
8	10,5	0,319	2,528
9	12,0	0,390	2,456
10	12,5	0,411	2,436

- Gráfico de Controle para Não-Conformidade por Unidade – Tamanho Variável da Amostra

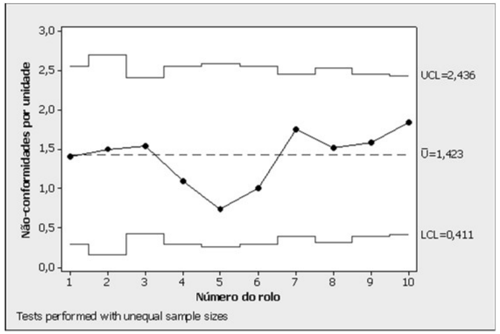


Gráfico de Controle Padronizado

- Estatística padronizada:

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

- Limites de Controle:

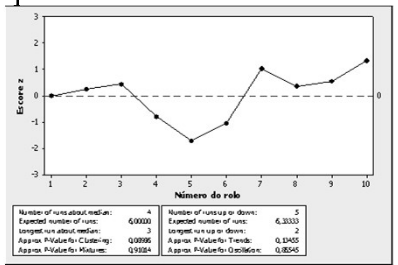
$$\begin{aligned} LSC_Z &= 3 \\ LM_Z &= 0 \\ LIC_Z &= -3 \end{aligned}$$

- Tecido – Cálculo do Escore

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

Número do rolo	*Qte. unidades de inspeção por rolo (n_i)*	*Média defeitos por unidade (u_i)*	*Desvio-padrão por amostra*	*Escore z_i*
1	10,0	1,40	0,377	-0,062
2	8,0	1,50	0,422	0,182
3	13,0	1,54	0,331	0,348
4	10,0	1,10	0,377	-0,857
5	9,5	0,74	0,387	-1,773
6	10,0	1,00	0,377	-1,122
7	12,0	1,75	0,344	0,949
8	10,5	1,52	0,368	0,273
9	12,0	1,58	0,344	0,465
10	12,5	1,84	0,337	1,235
	Média global:	**1,423**		

- Tecido – Gráfico de Controle Padronizado para Defeitos por unidade



√ É a opção preferida

√ Apropriado quando paralelamente são usados testes sequenciais e métodos de reconhecimento de padrão

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- WERKEMA, M.C.C. *Ferramentas Estatísticas Básicas para o Gerenciamento de Processos*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.