

Gráfico de Controle por Variáveis

Roteiro

1. Construção de Gráficos de Controle de \bar{X} e R
2. Análise de Desempenho dos Gráficos \bar{X} e R
3. Alternativas para Monitoramento da Dispersão
4. Regras Suplementares de Decisão para Gráficos \bar{X}
5. Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras
6. Referências

Controle Estatístico de Qualidade -2020

2

Gráficos de Controle \bar{X} e R: Análise do Desempenho Conjunto

Gráfico de \bar{X} e R

- Hipóteses associadas:
 $\sqrt{H_0: \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0}$
 $\sqrt{H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ e } \sigma \neq \sigma_0}$
- Risco de alarme falso do gráfico de \bar{X}
$$\alpha_{\bar{X}} = 1 - P \{ LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0 \}$$
- Risco de alarme falso do gráfico de R
$$\alpha_R = 1 - P \{ LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0 \}$$
- Probabilidade conjunta de alarme falso

$$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}} \alpha_R$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

79

- Considerando limites 3σ e $n = 4$:

$$\alpha_{\bar{X}} = 0,0027 \text{ e } \alpha_R = 0,0050$$

✓ O risco de alarme conjunto é $\alpha \approx 0,0077$

✓ Número médio de amostras até alarme falso:

$$CMS_0 \approx 130 \text{ (considerado elevado)}$$

Redução do Risco α

- Para melhorar a proteção contra alarmes falsos
 - ✓ Alargamento dos limites do gráfico
 - ✓ Razoável adotar $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R$
(caso não haja informações sobre os desajustes)

- Exemplo:

✓ Com $\alpha \approx 0,0024$ e $n = 4$ ($CMS_0 = 416,7$)

$$\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012,$$

✓ Limites dos gráficos:

- Gráfico de \bar{X}

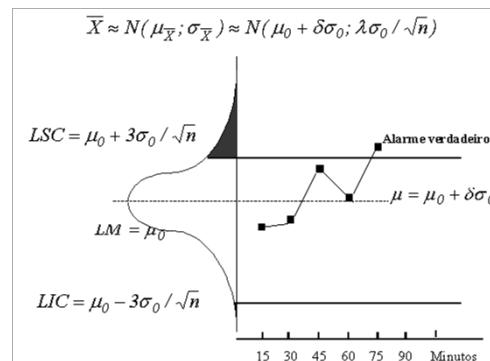
$$\mu_0 \pm 3,24\sigma_0/\sqrt{4}, \text{ pois } P\{|Z| > 3,24\} = 0,0012$$

- Gráfico de R

$$LSC_R = w_{0,9988}\sigma_0 = 5,25\sigma_0$$

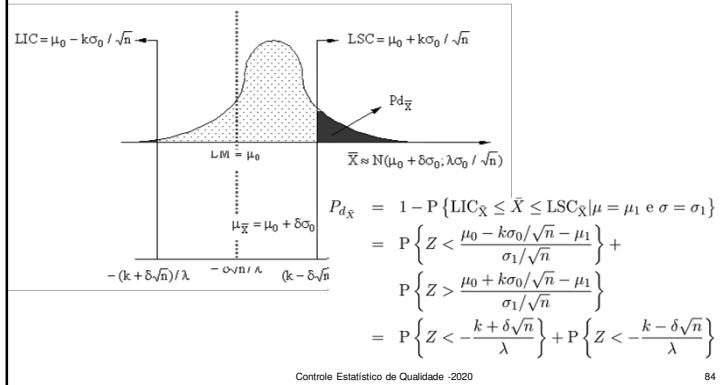
- Desajuste e instabilidade no processo

$$(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_1 = \lambda\sigma_0)$$



- Poder do Gráfico de \bar{X} :

- ✓ para sinalizar desajuste e instabilidade no processo
($\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ e $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$)



- Poder do gráfico de R

- ✓ para sinalizar instabilidade do processo
($\sigma_1 = \lambda\sigma_0$)

$$\begin{aligned} P_{d_R} &= 1 - P\{R > \text{LSC}_R | \sigma = \sigma_1\} \\ &= P\left\{W > \frac{w_{(1-\alpha_R)}\sigma_0}{\sigma_1}\right\} \\ &= P\left\{W > \frac{w_{(1-\alpha_R)}}{\lambda}\right\} \end{aligned}$$

- Poder conjunto dos gráficos \bar{X} e R

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R}$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

85

Exemplo A

- ✓ Deslocamento da média do processo: $\delta = 0,5$
- ✓ Desajuste do processo: $\lambda = 2$
- ✓ Plano amostral: ($n = 4$; $k = 3,24$; $w_{0,9988} = 5,25$)
- ✓ Poder do gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\left\{Z < -\frac{k + \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + P\left\{Z < -\frac{k - \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} \\ &= P\left\{Z < -\frac{3,24 + 0,5\sqrt{4}}{2} = -2,12\right\} \\ &\quad + P\left\{Z < -\frac{3,24 - 0,5\sqrt{4}}{2} = -1,12\right\} \\ &= 0,0170 + 0,1314 = 0,1484 \end{aligned}$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

86

- ✓ Poder do gráfico de R:

$$\begin{aligned} P_{d_R} &= 1 - P\left\{W \leq \frac{w_{(1-\alpha_R)}}{\lambda}\right\} \\ &= 1 - P\left\{W \leq \frac{5,25}{2} = 2,625\right\} \\ &= 1 - 0,75 = 0,25 \end{aligned}$$

- ✓ Poder conjunto:

$$\begin{aligned} P_d &= P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R} \\ &= 0,1484 + 0,25(1 - 0,1484) = 0,3613 \end{aligned}$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

87

- Caso variância não se altere: $\lambda = 1,00$

✓ Poder do gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\left\{Z < -\frac{k + \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + P\left\{Z < -\frac{k - \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} \\ &= P\left\{Z < -\frac{3,24 + 0,5\sqrt{4}}{1} = -4,24\right\} \\ &\quad + P\left\{Z < -\frac{3,24 - 0,5\sqrt{4}}{1} = -2,24\right\} \\ &= 0,01255 \end{aligned}$$

✓ Poder conjunto dos gráficos:

$$\begin{aligned} P_d &= P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R} \\ &= 0,01255 + 0,0012(1 - 0,01255) = 0,01374 \end{aligned}$$

✓ Pd reduz-se consideravelmente

- Sem o gráfico de R o poder de detecção praticamente não se altera

- Caso a média não se altere: $\delta = 0$

✓ Poder do gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\left\{Z < -\frac{k + \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + P\left\{Z < -\frac{k - \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} \\ &= 2 \times P\left\{Z < -\frac{3,24}{2} = -1,62\right\} \\ &= 0,1052 \end{aligned}$$

✓ Poder conjunto dos gráficos:

$$\begin{aligned} P_d &= P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R} \\ &= 0,1052 + 0,2500(1 - 0,1052) = 0,3289 \end{aligned}$$

✓ Pd_X independe do tamanho da amostra

✓ Sem o gráfico de controle de \bar{X} , o poder de detecção reduz-se

- Poder conjunto para detectar aumentos na dispersão do processo é maior que o poder individual do gráfico de R.

Exemplo B

- Exemplo B:

✓ Deslocamento da média do processo: $\delta = 0,5$

✓ Desajuste do processo: $\lambda = 1,2$

✓ Plano amostral: $(n = 4; k = 3,24)$

✓ Poder do gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\left\{Z < -\frac{k + \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + P\left\{Z < -\frac{k - \delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} \\ &= P\left\{Z < -\frac{3,24 + 0,5\sqrt{4}}{1,2} = -3,53\right\} \\ &\quad + P\left\{Z < -\frac{3,24 - 0,5\sqrt{4}}{1,2} = -2,24\right\} \\ &= 0,0307 + 0,0002 = 0,0309 \end{aligned}$$

✓ Poder do gráfico de R:

$$\begin{aligned} P_{d_R} &= 1 - P\left\{W \leq \frac{w(1-\alpha_R)}{\lambda}\right\} \\ &= 1 - P\left\{W \leq \frac{5,25}{1,2} = 4,375\right\} \\ &= 1 - 0,9890 = 0,0110 \end{aligned}$$

✓ Poder conjunto:

$$\begin{aligned} P_d &= P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R} \\ &= 0,0309 + 0,0110(1 - 0,0309) = 0,04156 \end{aligned}$$

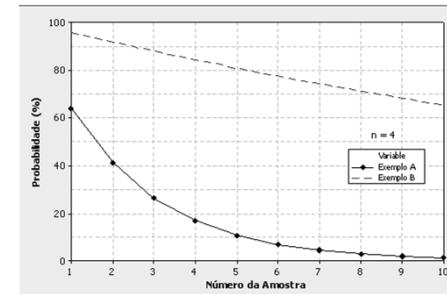
✓ Poder conjunto dos gráficos:

- Exemplo A: ($\delta = 0,5$ e $\lambda = 2,0$)
 $Pd = 0,3613$
- Exemplo B: ($\delta = 0,5$ e $\lambda = 1,2$)
 $Pd = 0,04156$

✓ Diferenças no poder global

- $Pd = 36\%$ para aumento de 100% no desvio-padrão
- $Pd = 4,2\%$ para aumento de 20% no desvio-padrão

- Probabilidade de os gráficos de \bar{X} e R não terem emitido sinal até a i -ésima amostra após o desajuste
 - ✓ As primeiras i observações caíram dentro dos limites

**Comentários**

- Exemplo A: ($\delta = 0,5$ e $\lambda = 2,0$)
 - ✓ É quase certo que pelo menos um dos gráficos perceberá as alterações até a 7ª. Amostra
- Exemplo B: ($\delta = 0,5$ e $\lambda = 1,2$)
 - ✓ Há uma probabilidade superior a 60% que até a 10ª. Amostra nenhum dos gráficos perceberá as alterações

Comparação de Poderes

• Planejamento:

- ✓ $n = 4$ e $\alpha_X = \alpha_R = 0,0012$ ($k=3,24$ e $LSC_R = 5,25\sigma_0$)

	A (estável)	B (estável)	C (ajustado)	D
$\delta = 0,5$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1$	$\delta = 0$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1,2$	
Pd_X	0,1484	0,01255	0,1052	0,0309
Pd_R	0,2500	α_R	0,2500	0,0107
Pd	0,3613	0,01374	0,3289	0,0413

- ✓ B: o gráfico R não é sensível a alterações na média
- ✓ C: O poder global é reduzido sem o gráfico \bar{X}
- ✓ D: diminuição do poder global (em comparação a A)

Comentário

- Os gráficos de \bar{X} e R não são indicados para monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações.
 - ✓ Deve-se recorrer a outros tipos de gráficos
 - CUSUM, EWMA, etc.

Gráficos de \bar{X} – Regras Suplementares

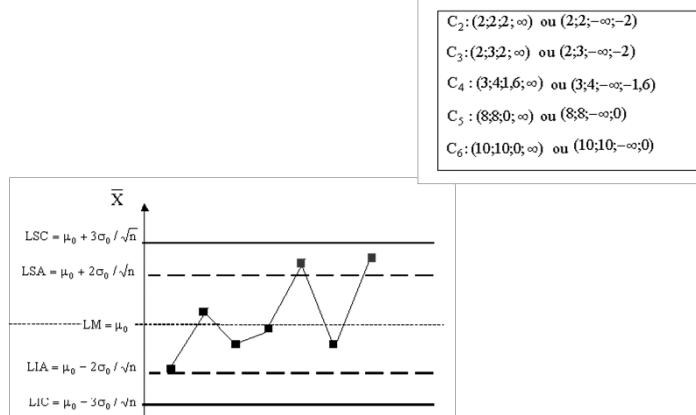
Regras Suplementares

- Em geral, definidas apenas para o gráfico de \bar{X}
 - ✓ Regras surgidas com o propósito de acelerar a percepção de alteração no processo;
 - ✓ Tentam formalizar a percepção do operador da possibilidade de perturbação no processo;

Notação das Regras

- (L, m, a, b) : sinal ocorre quando ao menos L , dentre os m últimos pontos, estiverem entre $\mu_0 + a \sigma_{\bar{X}}$ e $\mu_0 + b \sigma_{\bar{X}}$
- Regra Básica de Controle;
 - ✓ $C_1 : (1; 1; k; \infty)$ ou $(1; 1; -\infty; -k)$
1 ponto fora dos limites de controle ($k = 3$: limites 3);

- Gráfico de \bar{X} – Regras Suplementares de Decisão



Controle Estatístico de Qualidade -2020

133

- Algumas Regras Suplementares:

- ✓ $C_2 : (2; 2; 2; \infty) \text{ ou } (2; 2; -\infty; -2)$
- ✓ $C_3 : (2; 3; 2; \infty) \text{ ou } (2; 3; -\infty; -2)$
- ✓ $C_4 : (3; 4; 1,6; \infty) \text{ ou } (3; 4; -\infty; -1,6)$
- ✓ $C_5 : (8; 8; 0; \infty) \text{ ou } (8; 8; -\infty; 0)$
- ✓ $C_6 : (10; 10; 0; \infty) \text{ ou } (10; 10; -\infty; 0)$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

134

Alarmes Falsos

- Regras agilizam a detecção de mudanças, mas diminuem a proteção contra alarmes falsos
 - ✓ risco α aumenta
- Exemplo:
 - ✓ Alarme sempre que 6 pontos consecutivos caírem em qualquer dos lados da linha média:
 $0,5^5 = 0,0313$ (12 vezes o valor de $\alpha = 0,0027$);
- Devem-se alargar os limites de controle para se manter o nível de proteção contra alarmes falsos

Controle Estatístico de Qualidade -2020

135

- Frequência de alarmes falsos no gráfico de \bar{X} com regras suplementares

Regras Utilizadas	Probabilidade de Alarme Falso	Frequência Esperada de Alarmes Falsos
C_1	0,0027	1 a cada 370,4 inspeções
$C_1 \text{ e } C_2$	0,0036	1 a cada 278,0 inspeções
$C_1 \text{ e } C_3$	0,0044	1 a cada 225,5 inspeções
$C_1 \text{ e } C_4$	0,0035	1 a cada 286,2 inspeções
$C_1 \text{ e } C_5$	0,0065	1 a cada 152,8 inspeções
$C_1 \text{ e } C_6$	0,0037	1 a cada 273,8 inspeções

Controle Estatístico de Qualidade -2020

136

- Valores de k que garantem $\alpha = 0,0027$

Regras Utilizadas	Novo Valor para k
C_1	3,0000
C_1 e C_2	3,1274
C_1 e C_3	3,3492
C_1 e C_4	3,1072
C_1 e C_5	-----
C_1 e C_6	3,1316

Controle Estatístico de Qualidade -2020

137

Detecção de Mudanças

- Para combinação C_1 e C_3 , com

$$\sqrt{n} = 4; \delta = 0,60; w = 2 \text{ e } k = 3,3492$$

✓ Probabilidade abaixo do nível de alerta:

$$\begin{aligned} a_1 &= P\{\bar{X} < \mu_0 + w\sigma/\sqrt{n} \mid \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \\ &= P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 0,8\} \\ &= 0,78814 \end{aligned}$$

✓ Probabilidade entre nível de alerta e controle

$$\begin{aligned} a_2 &= P\{\mu_0 + w\sigma/\sqrt{n} < \bar{X} < \mu_0 + k\sigma/\sqrt{n} \mid \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \\ &= P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{0,8 < Z < 2,15\} \\ &= 0,1961 \end{aligned}$$

✓ M: qte. de amostras até sinal

$$E_{+\delta}(M) = \frac{1 + a_2 + a_1 a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \approx 15$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

138

- Similarmente para $\delta = -0,60$

✓ Probabilidades a_1 e a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 3,8\} \\ &= 0,999931 \\ a_2 &= P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{3,8 < Z < 4,55\} \\ &= 0,00069 \end{aligned}$$

✓ M: Quantidade de amostras até o sinal

$$E_{-\delta}(M) = \frac{1 + a_2 + a_1 a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \approx 1449$$

✓ CMS1: Quantidade média de amostras até o sinal

$$\text{CMS}_1 = \left[\frac{1}{E_{+\delta}(M)} + \frac{1}{E_{-\delta}(M)} \right]^{-1} \approx 15$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

139

- Combinação de Regras – CMS₁ ($n = 4$)

δ	C_1	C_1 e C_2	C_1 e C_3	C_1 e C_4	C_1 e C_6
0,00	370,0	370,0	370,0	370,0	370,0
0,20	199,0	166,0	147,0	148,0	120,0
0,40	71,6	49,7	41,3	40,1	33,8
0,60	27,8	17,9	15,0	14,3	15,2
0,80	12,4	8,0	7,0	6,8	9,1
1,00	6,3	4,4	4,1	4,1	6,1
1,20	3,7	2,8	2,8	2,8	4,0
1,40	2,4	2,0	2,1	2,2	2,7
1,60	1,7	1,6	1,7	1,7	1,9
1,80	1,4	1,4	1,5	1,4	1,5
2,00	1,2	1,2	1,3	1,2	1,2

Controle Estatístico de Qualidade -2020

140

- Comentários:

- ✓ C_1 e C_6 : ágil na detecção de pequenas perturbações na média;
- ✓ C_1 e C_2 : praticamente sempre mais ágil que o gráfico de controle 3σ tradicional (C_1 isolada).
- ✓ Para manutenção do nível de proteção contra alarmes falsos, deve-se alargar os limites de controle.

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4^a. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, 1993.