Gráfico de Controle por Variáveis

Roteiro

1. Construção de Gráficos de Controle de $\overline{X}$ e R
2. Análise de Desempenho dos Gráficos $\overline{X}$ e R
3. Alternativas para Monitoramento da Dispersão
4. Regras Suplementares de Decisão para Gráficos $\overline{X}$
5. Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras
6. Referências

Principais Gráficos de Variáveis

- Gráfico de Média ($\overline{X}$)
- Gráfico de Amplitude (R)
- Gráfico de Variância (S^2)
- Gráfico de Desvio-Padrão (S)

Análise de Desempenho dos Gráficos $\overline{X}$ e R

Desempenho dos Gráficos de Controle

- Capacidade de detectar perturbações no processo
- É importante para planejamento do gráfico:
  - √ Determinação do plano de amostragem
    - tamanho amostra; intervalo entre amostras
  - √ Estabelecimento dos Limites de Controle
    - abertura do gráfico

Teste de Hipóteses

	Decisão			
	Não Rejeitar H_0		Rejeitar H_0	
V	Decisão Correta	$1 - \alpha$	Erro Tipo I	α
F	Erro Tipo II	β	Decisão Correta	$1 - \beta$

Teste de Hipóteses do Gráfico de $\overline{X}$

- H_0: $\mu = \mu_0$ *vs.* H_1: $\mu \neq \mu_0$
- H_0:
  - √ Processo em controle
  - √ Processo ajustado
  - √ Processo centrado no valor-alvo
  - √ Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita H_0 toda vez em que $\overline{X}$ cai fora da zona de ação do gráfico (dentro dos limites de controle)

Erros de Decisão

- Alarme Falso (Erro tipo I)
  - √ considerar erroneamente o processo fora de controle
  - √ Consequência: intervir na hora errada
- Não detecção (Erro tipo II)
  - √ considerar erroneamente o processo em controle
  - √ Consequência: não intervir na hora certa

Medidas de Desempenho

- Supondo-se que as causas especiais não alterem σ
  - √ α = P{Erro tipo I}

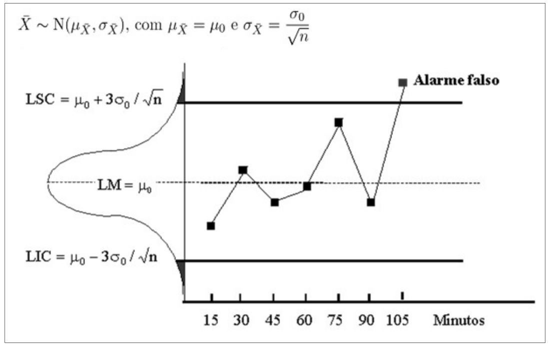
$$\alpha = \mathrm{P}\left(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0\right)$$

  - √ β = P{Erro tipo II}

$$\beta = \mathrm{P}\left\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\right\}$$

  - √ Poder do Gráfico de Controle: $P_d = 1 - \beta$

- Gráfico de $\overline{\text{X}}$ – Ocorrência de Alarme Falso



Alarme Falso

- Para muitas distribuições, $\overline{\text{X}}$ tenderá para uma Normal mesmo para *n* pequeno
- Processo em controle com desempenho 3σ

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{P}\left\{Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= \mathrm{P}\{|Z| > 3\} \\ &= 0,0027 \end{aligned}$$

Número Médio de Amostras

L: Quantidade de amostras antes de alarme falso

- √ *L* ~ geométrica (α)

$$\mathrm{P}\{L = x\} = \alpha(1-\alpha)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

- √ Número médio de amostras antes de alarme falso

  CMS_0: Comprimento médio da sequência com o processo sob controle

$$\mathrm{CMS}_0 = \mathrm{E}(L) = \frac{1}{\alpha}$$

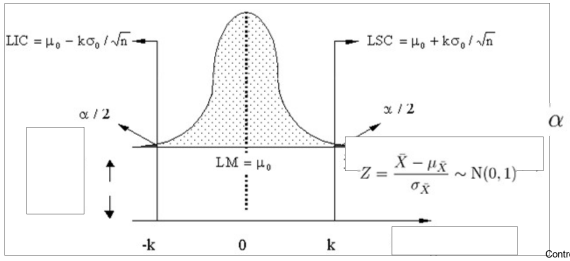
- √ Para limites 3σ, CMS_0 = 370,4

Influência da Abertura do Gráfico

- Semi-amplitude da região de controle:

$$k\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

  √ Diminuição da frequência de alarmes falsos
  - adotar $k > 3$



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\alpha = \mathrm{P}\left\{|Z| < k\right\}$$

- Exemplo: Para $k = 3{,}10$

  √ Risco de alarme falso:

$$\alpha = \mathrm{P}\left\{|Z| < k\right\} = \mathrm{P}\left\{|Z| < 3,10\right\} = 0,0019$$

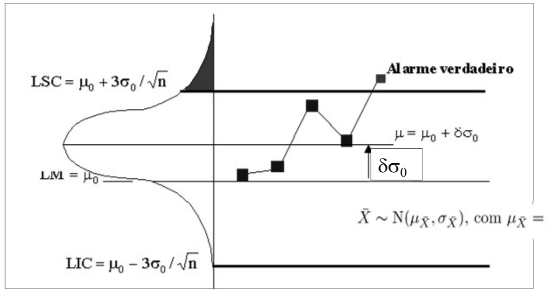
  √ Número médio até alarme falso (tempo discreto) :

$$\mathrm{CMS}_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0019} = 516,7$$

  √ TMA: tempo médio entre alarmes (tempo contínuo)

TMA = 516,7 x h

Gráfico de $\bar{X}$ – Alarme Verdadeiro



$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}), \text{ com } \mu_{\bar{X}} = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

√ Processo sob influência de causa especial (H_1 Verdadeira) o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico

Deslocamento da Média

- Sejam

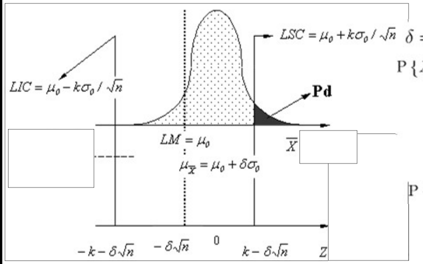
$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 + \delta\sigma_0 \\ \delta &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \end{aligned}$$

  √ Se $\delta \geq 1{,}5$ o valor de $\bar{X}$ cairá na zona de ação rapidamente

  √ Se $\delta < 1{,}5$ haverá uma certa inércia para a média amostral cair na zona de ação

Poder do Gráfico de $\overline{X}$

P_d: P{um valor de $\overline{X}$ cair na zona de ação}



$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X > LSC_{\bar{X}}\} &= \mathrm{P}\left\{Z > \frac{LSC - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} - \mu_1}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= \mathrm{P}\{Z > k - \delta\sqrt{n}\} \\ &= \mathrm{P}\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} \end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} = \mathrm{P}\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

$$P_d = \mathrm{P}\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + \mathrm{P}\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

- No caso em que $k = 3$, $\delta = 1$ e $n = 4$

$$\begin{aligned} P_d &= \mathrm{P}\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + \mathrm{P}\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\} \\ &= \mathrm{P}\left\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\right\} \\ &= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587 \end{aligned}$$

Alarme Verdadeiro

M: Qte. de amostras antes de um alarme verdadeiro

√ $M \sim$ geométrica (P_d)

$$\mathrm{P}\{M = x\} = P_d(1 - P_d)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

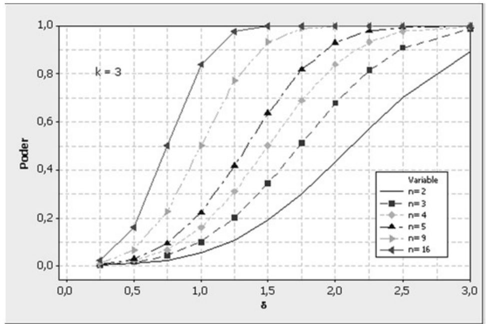
√ Número médio de amostras para detectar desajuste

- CMS_1: comprimento médio de sequência com o processo fora de controle

$$\mathrm{CMS}_1 = \mathrm{E}(M) = \frac{1}{P_d}$$

- Necessárias, em média, 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar deslocamento de 1 desvio-padrão da média
- Necessárias em média 2 amostras de tamanho 9 para perceber o mesmo deslocamento ($P_d = 0,5$)

- Curvas de poder *vs.* deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Amostra	Poder
2	0,06
4	0,159
9	0,50

√ n não afeta a probabilidade de alarme falso

√ Tamanho amostral tem grande influência no poder do gráfico de controle (erro tipo II)

Rapidez de Sinalização

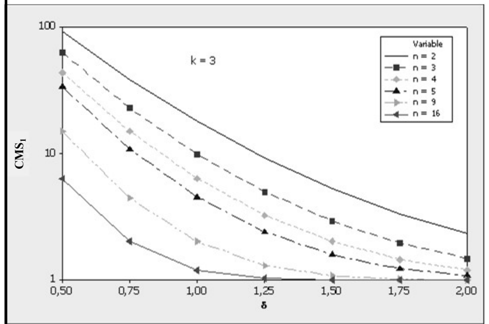
NMA: número médio de amostras até o sinal

$$\text{CMS}_i = \frac{1}{p_i}$$

√ Se H_0: $\mu = \mu_0$ for verdadeira, $p_0 = \alpha$ e $\text{CMS}_0 = 1/\alpha$

√ Se H_0: $\mu = \mu_0$ for falsa, $p_1 = P_d$ e $\text{CMS}_1 = 1/P_d$

- Curvas de CMS_1 *vs.* deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Tamanho	Qte.
3	10
9	2

√ Deslocamento na média de 1 desvio-padrão

- Em média, para detecção: 10 amostras de tamanho 3 ou 2 amostras de tamanho 9

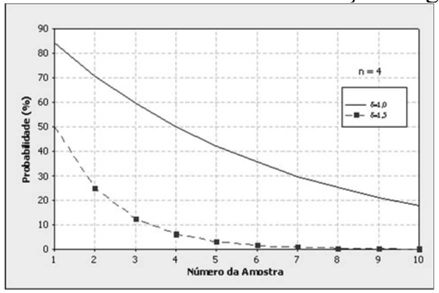
- M: número da amostra que sinaliza o desajuste

√ Para $\delta = 1{,}00$, $n = 4$ ➔ P{M=1} = 0,159 (Poder)

m	P{M=m}	P{M≤m}
1	0,16	0,16
2	0,84 x 0,16	0,29
3	$0{,}84^2$ x 0,16	0,41
4	$0{,}84^3$ x 0,16	0,50
5	$0{,}84^4$ x 0,16	0,58
6	$0{,}84^5$ x 0,16	0,65
7	$0{,}84^6$ x 0,16	0,70

- Curva de Probabilidade de Não-detecção:

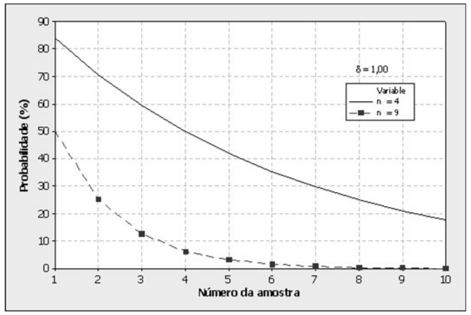
√ Probabilidade de, após desajuste, todos os *i* primeiros valores de $\overline{X}$ não caírem na zona de ação do gráfico



√ Velocidade de detecção de desajuste para amostra n=4

- Para δ=1,5 detecção com 'certeza' até a 7ª. inspeção
- Para δ=1,0 30% de chance de não ser percebido até 7ª. amostra

- Curva de Probabilidade de Não Detecção para
  - √ $\delta = 1,0$



Desempenho do Gráfico de R

- Comentários:
  - √ Deslocamento da média da ordem de 1,5 σ será detectado com 'certeza' até a 7ª. amostra.
  - √ Deslocamento de $\delta = 1,0$ tem cerca de 30% de probabilidade de não ser percebido até a 7ª. amostra.
  - √ Os gráficos de $\overline{X}$ são ágeis na detecção de grandes deslocamentos da média ($\delta > 1,5$) e lentos no caso de deslocamentos moderados.
  - √ Com grandes amostras, os gráficos de $\overline{X}$ são ágeis na detecção de deslocamentos moderados e lentos no caso de amostras pequenas.

Gráfico de R

- Limites de controle:

$$\begin{aligned} LSC_R &= d_2\hat{\sigma}_0 + 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 \\ LM_R &= d_2\hat{\sigma}_0 \\ LIC_R &= d_2\hat{\sigma}_0 - 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 \end{aligned}$$

- Estimativa do desvio-padrão do processo:

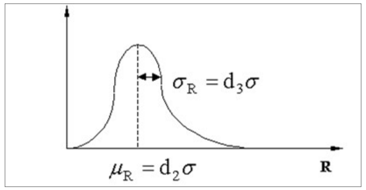
$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Gráfico de R

- Hipóteses associadas:
  - √ H_0: $\sigma = \sigma_0$ *vs.* $\sigma \neq \sigma_0$
    (σ_0: desvio-padrão do processo sob controle)
- Medidas associadas

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \mathrm{P}\left(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0\right)\\ \beta &= \mathrm{P}\left(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma \neq \sigma_0\right)\end{aligned}$$

Cálculo de Probabilidades de R



√ A distribuição de R é assimétrica
√ A distribuição de R depende de *n* e σ
√ A amplitude relativa W = R/σ não depende de σ
√ Valores para $P\{W \leq w_0 \mid n = n_0\}$ (Tabela B)
- Hipótese de que X tenha distribuição normal
- Uso da tabela: $\mathrm{P}\left\{R < r_0\right\} = \mathrm{P}\left\{W < \frac{r_0}{\sigma}\right\}$

Gráfico de R – Alarme Falso

- Processo sob controle e desempenho 3σ

$$\begin{aligned}1-\alpha &= \mathrm{P}\left\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0, n = n_0\right\}\\ &= \mathrm{P}\left\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\}\sigma_0 \leq R \leq (d_2 + 3d_3)\sigma_0 | n = n_0\right\}\\ &= \mathrm{P}\left\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\} \leq W \leq (d_2 + 3d_3) | n = n_0\right\}\end{aligned}$$

√ $\alpha > 0{,}0027$ (para limites 3σ)
√ Para $2 \leq n \leq 6$, $LIC_R = 0$ ($d_2 < 3d_3$)

- Número médio de amostras até alarme falso

$$\mathrm{CMS}_0 = \frac{1}{\alpha}$$

- Risco α para n_0 = 2, 3, 4 e 5

n	d_2	d_3	LIC_R	LSC_R	α	CMS_0
2	1,128	0,853	0	3,69	0,0090	111
3	1,693	0,888	0	4,36	0,0060	167
4	2,059	0,880	0	4,70	0,0050	200
5	2,326	0,864	0	4,92	0,0047	213
6	2,534	0,848	0	5,08	0,0045	222
7	2,704	0,833	0,21	5,20	0,0044	227
10	2,847	0,820	0,69	5,47	0,0041	244

$\mathrm{LIC_R} = \max\{0, d_2 - 3d_3\}$ $\mathrm{LSC_R} = d_2 + 3d_3$ $\mathrm{CMS}_0 = \frac{1}{\alpha}$

Gráfico de R – Poder

$$P_d = \mathrm{P}\left\{R > LSC_R | n = n_0, \sigma = \sigma_1\right\}$$

√ Supondo $\sigma_1 = 2\sigma_0$

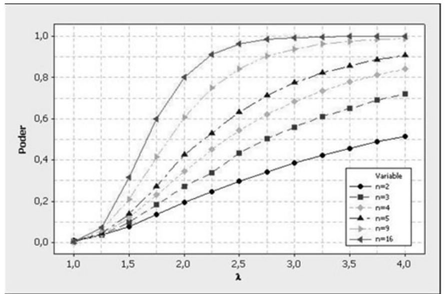
$$\begin{aligned} P_d &= \mathrm{P}\left\{\frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + 3d_3)\sigma_0}{\sigma_1} | n = n_0\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{W > \frac{d_2 + 3d_3}{2} | n = n_0\right\} \end{aligned}$$

√ Para n = 5

$$\begin{aligned} P_d &= \mathrm{P}\left\{W > \frac{2,326 + (3)(0,864)}{2} | n = 5\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{W > 2,46 | n = 5\right\} = 1 - 0,5904 \approx 0,41 \end{aligned}$$

- Para $\sigma_1 = \lambda\ \sigma_0$
  λ: fator de aumento

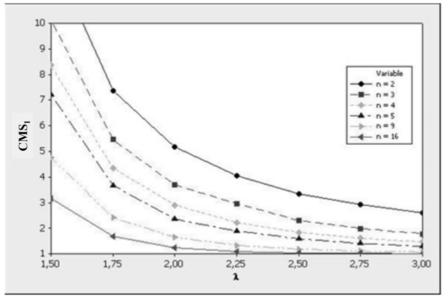
$$P_d = \mathrm{P}\left\{W > \frac{d_2 + 3d_3}{\lambda} | n = n_0\right\}$$



Poder para detectar aumento de 100% ($\lambda = 2$) em σ

n	P_d
2	0,20
5	0,41
16	0,80

- Número médio de amostras até detecção: $\mathrm{CMS}_1 = \dfrac{1}{P_d}$



CMS_1 para detectar aumento de 100% ($\lambda = 2$) em σ

n	CMS_1
2	5
4	3

- Limites de controle para α pré-definido:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{LIC_R}}{\hat{\sigma}_0} &= w_{\alpha/2} \\ \frac{\mathrm{LSC_R}}{\hat{\sigma}_0} &= w_{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

√ $w_{\alpha/2}$: valor de w, tal que $\mathrm{P}\{W < w_{\alpha/2}\} = \alpha/2$
√ LM = $d_2\ \sigma_0$ (não é afeatdo)
√ Vantagem: detectar melhorias do processo

- Para n = 4 e α = 0,002: $\begin{aligned} \mathrm{LSC_R} &= w_{0,999}\hat{\sigma}_0 = 5,30\,\hat{\sigma}_0 \\ \mathrm{LIC_R} &= w_{0,001}\hat{\sigma}_0 = 0,20\,\hat{\sigma}_0 \end{aligned}$
- Para n = 4 e desempenho 3σ: $\begin{aligned} \mathrm{LSC_R} &= 4,70\,\hat{\sigma}_0 \\ \alpha &= 0,005 \end{aligned}$

Gráficos de Controle $\overline{X}$ e R: Análise do Desempenho Conjunto

Gráfico de $\overline{X}$ e R

- Hipóteses associadas:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$
  - √ H_1: $\mu \neq \mu_0$ e $\sigma \neq \sigma_0$
- Risco de alarme falso do gráfico de $\overline{X}$

$$\alpha_{\bar{X}} = 1 - \text{P}\left\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0\right\}$$

- Risco de alarme falso do gráfico de R

$$\alpha_R = 1 - \text{P}\left\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0\right\}$$

- Probabilidade conjunta de alarme falso

$$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}}\, \alpha_R$$

- Considerando limites 3σ e n = 4:

$$\alpha_{\bar{X}} = 0,0027 \text{ e } \alpha_R = 0,0050$$

  - √ O risco de alarme conjunto é $\alpha \approx 0,0077$
  - √ Número médio de amostras até alarme falso: $CMS_0 \approx 130$ (considerado elevado)

Redução do Risco α

- Para melhorar a proteção contra alarmes falsos
  - √ Alargamento dos limites do gráfico
  - √ Razoável adotar $\alpha_{\overline{X}} = \alpha_R$ (caso não haja informações sobre os desajustes)

- Exemplo:
  - √ Com $\alpha \approx 0{,}0024$ e $n = 4$ ($CMS_0 = 416{,}7$)

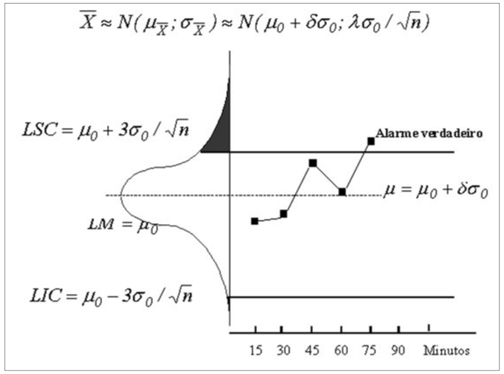
    $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0{,}0012$,
  - √ Limites dos gráficos:
    - Gráfico de $\bar{X}$

      $\mu_0 \pm 3,24\sigma_0/\sqrt{4}$, pois $\mathrm{P}\{|Z| > 3,24\} = 0,0012$
    - Gráfico de R

$$\mathrm{LSC_R} = w_{0,9988}\sigma_0 = 5,25\sigma_0$$

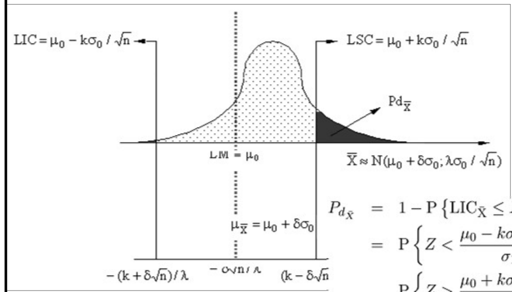
- Desajuste e instabilidade no processo

  ($\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ e $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$)



- Poder do Gráfico de $\bar{X}$:
  - √ para sinalizar desajuste e instabilidade no processo

    ($\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ e $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$)



$$\begin{aligned}
P_{d_{\bar{X}}} &= 1 - \mathrm{P}\left\{\mathrm{LIC}_{\bar{X}} \le \bar{X} \le \mathrm{LSC}_{\bar{X}} | \mu = \mu_1 \text{ e } \sigma = \sigma_1\right\} \\
&= \mathrm{P}\left\{Z < \frac{\mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right\} + \\
&\quad \mathrm{P}\left\{Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right\} \\
&= \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k+\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\}
\end{aligned}$$

- Poder do gráfico de R
  - √ para sinalizar instabilidade do processo

    ($\sigma_1 = \lambda\sigma_0$)

$$\begin{aligned}
P_{d_R} &= 1 - \mathrm{P}\left\{R > \mathrm{LSC_R} | \sigma = \sigma_1\right\} \\
&= \mathrm{P}\left\{W > \frac{w_{(1-\alpha_R)}\sigma_0}{\sigma_1}\right\} \\
&= \mathrm{P}\left\{W > \frac{w_{(1-\alpha_R)}}{\lambda}\right\}
\end{aligned}$$

- Poder conjunto dos gráficos $\bar{X}$ e R

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R}$$

Exemplo A

√ Deslocamento da média do processo: δ = 0,5

√ Desajuste do processo: λ = 2

√ Plano amostral: (n = 4; k = 3,24; $w_{0,9988}$ = 5,25)

√ Poder do gráfico de $\overline{\mathrm{X}}$:

$$P_{d_{\bar X}} = \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k+\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\}$$
$$= \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24+0,5\sqrt{4}}{2} = -2,12\right\}$$
$$+\mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24-0,5\sqrt{4}}{2} = -1,12\right\}$$
$$= 0,0170 + 0,1314 = 0,1484$$

√ Poder do gráfico de R:

$$P_{d_R} = 1 - \mathrm{P}\left\{W \le \frac{w_{(1-\alpha_R)}}{\lambda}\right\}$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left\{W \le \frac{5,25}{2} = 2,625\right\}$$
$$= 1 - 0,75 = 0,25$$

√ Poder conjunto:

$$P_d = P_{d_{\bar X}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar X}}\,P_{d_R}$$
$$= 0,1484 + 0,25(1-0,1484) = 0,3613$$

- Caso variância não se altere: λ = 1,00

√ Poder do gráfico de $\overline{\mathrm{X}}$:

$$P_{d_{\bar X}} = \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k+\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\}$$
$$= \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24+0,5\sqrt{4}}{1} = -4,24\right\}$$
$$+\mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24-0,5\sqrt{4}}{1} = -2,24\right\}$$
$$= 0,01255$$

√ Poder conjunto dos gráficos:

$$P_d = P_{d_{\bar X}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar X}}\,P_{d_R}$$
$$= 0,01255 + 0,0012(1-0,01255) = 0,01374$$

√ Pd reduz-se consideravelmente

- Sem o gráfico de R o poder de detecção praticamente não se altera

- Caso a média não se altere: δ = 0

√ Poder do gráfico de $\overline{\mathrm{X}}$:

$$P_{d_{\bar X}} = \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k+\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\}$$
$$= 2 \times \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24}{2} = -1,62\right\}$$
$$= 0,1052$$

√ Poder conjunto dos gráficos:

$$P_d = P_{d_{\bar X}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar X}}\,P_{d_R}$$
$$= 0,1052 + 0,2500(1-0,1052) = 0,3289$$

√ Pd_X independe do tamanho da amostra

√ Sem o gráfico de controle de $\overline{\mathrm{X}}$, o poder de detcção reduz-se

- Poder conjunto para detectar aumentos na dispersão do processo é maior que o poder individual do gráfico de R.

Exemplo B

- Exemplo B:
  - √ Deslocamento da média do processo: δ = 0,5
  - √ Desajuste do processo: λ = 1,2
  - √ Plano amostral: (n = 4; k = 3,24)
  - √ Poder do gráfico de $\overline{X}$:

$$P_{d_{\bar{X}}} = \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k+\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right\}$$
$$= \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24+0,5\sqrt{4}}{1,2} = -3,53\right\}$$
$$+ \mathrm{P}\left\{Z < -\frac{3,24-0,5\sqrt{4}}{1,2} = -2,24\right\}$$
$$= 0,0307 + 0,0002 = 0,0309$$

√ Poder do gráfico de R:

$$P_{d_R} = 1 - \mathrm{P}\left\{W \le \frac{w_{(1-\alpha_R)}}{\lambda}\right\}$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left\{W \le \frac{5,25}{1,2} = 4,375\right\}$$
$$= 1 - 0,9890 = 0,0110$$

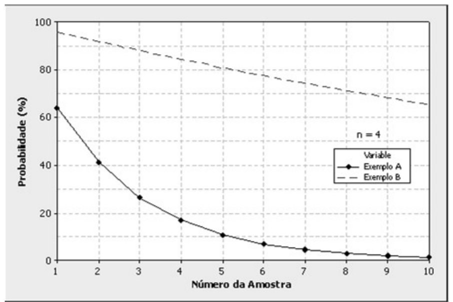
√ Poder conjunto:

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}}\, P_{d_R}$$
$$= 0,0309 + 0,0110(1 - 0,0309) = 0,04156$$

√ Poder conjunto dos gráficos:
- Exemplo A: (δ = 0,5 e λ = 2,0)
  Pd = 0,3613
- Exemplo B: (δ = 0,5 e λ = 1,2)
  Pd = 0,04156

√ Diferenças no poder global
- Pd = 36% para aumento de 100% no desvio-padrão
- Pd = 4,2% para aumento de 20% no desvio-padrão

- Probabilidade de os gráficos de $\overline{X}$ e R não terem emitido sinal até a i-ésima amostra após o desajuste
  - √ As primeiras i observações caíram dentro dos limites



Comentários

- Exemplo A: ($\delta = 0{,}5$ e $\lambda = 2{,}0$)
  - √ É quase certo que pelo menos um dos gráficos perceberá as alterações até a 7ª. Amostra
- Exemplo B: ($\delta = 0{,}5$ e $\lambda = 1{,}2$)
  - √ Há uma probabilidade superior a 60% que até a 10ª. Amostra nenhum dos gráficos perceberá as alterações

Comparação de Poderes

- Planejamento:
  - √ $n = 4$ e $\alpha_X = \alpha_R = 0{,}0012$ ($k=3{,}24$ e $LSC_R = 5{,}25\sigma_0$)

	A	**B** (estável)	**C** (ajustado)	**D**
	$\delta = 0{,}5$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0{,}5$ e $\lambda = 1$	$\delta = 0$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0{,}5$ e $\lambda = 1{,}2$
Pd_X	0,1484	0,01255	0,1052	0,0309
Pd_R	0,2500	α_R	0,2500	0,0107
Pd	0,3613	0,01374	0,3289	0,0413

- √ B: o gráfico R não é sensível a alterações na média
- √ C: O poder global é reduzido sem o gráfico $\overline{X}$
- √ D: diminuição do poder global (em comparação a A)

Comentário

- Os gráficos de $\overline{X}$ e R não são indicados para monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações.
  - √ Deve-se recorrer a outros tipos de gráficos
    - CUSUM, EWMA, etc.

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapmann & Hall, 1993.