

Gráfico de Controle por Variáveis

Roteiro

1. Construção de Gráficos de Controle de \bar{X} e R
2. Análise de Desempenho dos Gráficos \bar{X} e R
3. Alternativas para Monitoramento da Dispersão
4. Regras Suplementares de Decisão para Gráficos \bar{X}
5. Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras
6. Referências

Controle Estatístico de Qualidade -2020

2

Principais Gráficos de Variáveis

- Gráfico de Média (\bar{X})
- Gráfico de Amplitude (R)
- Gráfico de Variância (S^2)
- Gráfico de Desvio-Padrão (S)

Controle Estatístico de Qualidade -2020

3

Construção dos Gráficos de Controle \bar{X} e R

Variáveis Contínuas

- Para monitoramento de característica de qualidade contínua são usuais:
 - ✓ Gráfico de Média \bar{X} :
 - monitorar centralidade do processo
 - ajuste do processo
 - ✓ Gráfico de Amplitude R:
 - monitorar dispersão do processo
 - estabilidade do processo

Controle Estatístico de Qualidade -2020

5

Critérios para Monitoramento

- “Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar a variabilidade” (Shewhart);
- Processo sob controle:
 - ✓ Deseja-se que raramente caia um ponto na região de ação do gráfico
 - depende da abertura do gráfico
 - ✓ Busca-se não intervir equivocadamente em um processo sob controle
 - Em geral, intervenções desnecessárias geram custos

Controle Estatístico de Qualidade -2020

6

Gráfico de \bar{X}

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}$$
- Parâmetros da Média Amostral:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_0$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$
 - ✓ μ_0 : média do processo sob controle
 - ✓ σ_0 : desvio-padrão do processo sob controle

Controle Estatístico de Qualidade -2020

7

- μ_0 e σ_0 não conhecidos com precisão absoluta
- Limites de controle estimados:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

8

Escolha da Abertura do Gráfico

- Processo sob controle (estável e ajustado)
 - ✓ Intervalo $\pm 3\sigma_0/\sqrt{n}$ engloba 99,73% dos valores de \bar{X}
- Caso algum valor de X caia fora desse intervalo
 - ✓ É mais verossímil que a alteração da média do processo (μ) seja devido a alguma causa especial

Controle Estatístico de Qualidade -2020

9

Amplitude Amostral

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

- Distribuição amostral da amplitude

✓ Hipótese:

– população normal com média μ e desvio-padrão σ

$$\sqrt{E(R)} = \mu_R = d_2\sigma$$

$$\sqrt{DP(R)} = \sigma_R = d_3\sigma$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

10

Amplitude Relativa

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

- Distribuição amostral da amplitude

✓ Hipótese:

– população normal com média μ e desvio-padrão σ

$$\sqrt{E(W)} = \mu_W = d_2$$

$$\sqrt{Var(W)} = \sigma_W^2 = d_3^2$$

✓ Parâmetros dependem apenas do tamanho amostral

✓ Distribuição acumulada de W:

– Tabela B

Controle Estatístico de Qualidade -2020

11

Valores de d_2 e d_3

n	d_2	d_3
2	1,128	0,853
3	1,693	0,888
4	2,059	0,880
5	2,326	0,864
6	2,534	0,848
7	2,704	0,833
8	2,847	0,820
9	2,970	0,808
10	3,078	0,797
11	3,173	0,787
12	3,258	0,778
13	3,336	0,770
14	3,407	0,763
15	3,472	0,756

Controle Estatístico de Qualidade -2020

13

Gráfico de *R*

- Limites de Controle (exatos):

$$LSC_R = d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 = (d_2 + 3d_3)\sigma_0$$

$$LM_R = d_2\sigma_0$$

$$LIC_R = d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0 = (d_2 - 3d_3)\sigma_0$$
- Se $LICR < 0$
 - ✓ Adota-se $LICR = 0$
- Quando R for maior que $LSCR$
 - ✓ Alarme de aumento do desvio-padrão do processo

Controle Estatístico de Qualidade -2020

14

Uso dos Gráficos de Controle

- Fases no uso de um gráfico de controle:
 - ✓ Fase 1: Uso dos gráficos para estabelecimento do controle
 - testar se o processo estava ou não sob controle quando os m subgrupos preliminares forem extraídos e as estatísticas amostrais calculadas
 - obtenção de conjunto de observações sob controle, de maneira a estabelecer os limites de controle da fase 2
 - ✓ Fase 2: Monitoramento da produção futura

Controle Estatístico de Qualidade -2020

15

Limites Tentativos (1)

- Limites de controle obtidos quando são usadas amostras preliminares
 - ✓ Permitem determinar se o processo estava sob controle durante seleção de m amostras iniciais
- Para testar hipótese de controle do processo no passado:
 - ✓ Plotar valores de \bar{X} e R

Controle Estatístico de Qualidade -2020

16

Limites Tentativos (2)

- ✓ Se todos os pontos caem dentro limites de controle e não se observa comportamento sistemático;
 - Processo está sob controle e limites de controle tentativos são apropriados
- ✓ Se um ou mais pontos caem na zona de ação do gráfico
 - Procuram-se causas especiais relacionadas com cada ponto na zona de ação dos gráficos
 - Identificada a causa especial, o ponto é descartado e os limites são recalculados
 - Prossegue-se com o procedimento até que todos os pontos caiam dentro dos limites de controle

Controle Estatístico de Qualidade -2020

17

Limites Tentativos (3)

- ✓ Se causa especial não é identificada
 - Descarta-se o ponto se houver indícios de que o ponto veio de distribuição característica de processo fora de controle
 - Retém-se os pontos, considerando-se apropriados os limites tentativos
(Se os pontos representam situação fora de controle, os limites resultantes serão folgados)
- ✓ Em geral, um ou dois pontos fora de controle não distorcem significativamente os limites de controle
- ✓ Se amostram futuras futuras ainda indicarem o controle do processo, então os pontos inexplicáveis podem ser seguramente descartados

Controle Estatístico de Qualidade -2020

18

Limites Tentativos (4)

- ✓ Caso ocorram vários pontos na zona de ação dos gráficos
 - Descarte de todos os pontos pode prejudicar o estabelecimento dos limites de controle
(Abordagem ignorará informação relevante contida nos dados)
 - É improvável o sucesso na procura da causa atribuível para cada um dos pontos fora de controle
 - Em geral é melhor se concentrar no *padrão* formado por esses pontos
(Causa atribuível associada ao padrão dos pontos foras de controle é identificada mais facilmente)

Controle Estatístico de Qualidade -2020

19

Estimativas Iniciais do Processo

- Estimadores dos parâmetros do processo
(conjunto inicial de m amostras)
 - ✓ Média do processo $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$
 - ✓ Estimador desvio-padrão do processo
$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$
- Gráfico de R
 - ✓ Pode ser construído com o processo desajustado
 - ✓ Em geral, a construção dos gráficos de controle é iniciada pelo Gráfico de R

Controle Estatístico de Qualidade -2020

20

Exemplo

- ✓ Característica de qualidade: Volume de Sacos de leite:
- ✓ Conjunto de dados para estimação inicial:
 - 25 subgrupos racionais de tamanho 5 ($m = 25$ e $n = 5$)
 - Banco de dados: *BD_CQI.xls/guia: leite*
- ✓ Tabela 3.2 (Branco Costa et. al)

X1	X2	X3	X4	X5	R
1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,6
999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9

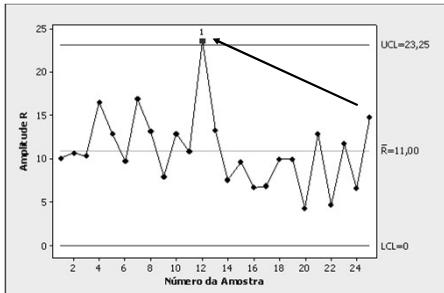
- ✓ Estimação variabilidade do processo sob controle:

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,996}{2,326} = 4,729$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

21

- Gráfico de R:



- Estimativas
- $$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,727 = 23,25$$
- $$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 11,00$$
- $$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,26$$
- $$LIC_R = 0$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

23

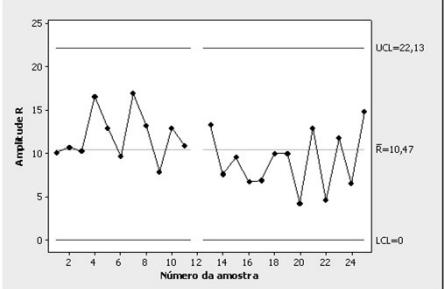
1ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo
 $\hat{\sigma}_0 = 4,727$
- Amplitude da 12ª amostra é grande
✓ Necessária investigação para encontrar justificativa para aumento da variabilidade do processo
- Se for possível diagnosticar causa especial que afetou variabilidade
✓ Elimina-se amostra e estima-se novamente σ_0 .
(Se causa especial influenciou apenas essa amostra)

Controle Estatístico de Qualidade -2020

24

- Gráfico de R:



- Estimativas
- $$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,467}{2,326} = 4,500$$
- $$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,500 = 22,13$$
- $$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 10,467$$
- $$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,20$$
- $$LIC_R = 0$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

26

2ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo
 $\hat{\sigma}_0 = 4,500$
- A amplitude dos 24 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da média
✓ \bar{R}/d_2 é estimativa confiável do desvio-padrão do processo
✓ Processo aparenta estar sob controle durante Fase 1

Controle Estatístico de Qualidade -2020

27

Construção do Gráfico de \bar{X}

- É afetado por causas especiais que afetam:
 - ✓ média do processo, ou
 - ✓ dispersão do processo
- Só pode ser construído com o processo ajustado e estável
 - ✓ isento de todo tipo de causas especiais
 - ✓ Nesse caso, preocupação será apenas com estimativa da média do processo

Controle Estatístico de Qualidade -2020

28

Gráfico de \bar{X}

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

- Estimativa dos Parâmetros do Processo:

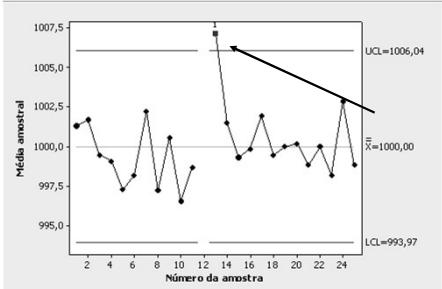
$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

29

- Gráfico de \bar{X} :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 1006,04$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 1000,0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,97$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

31

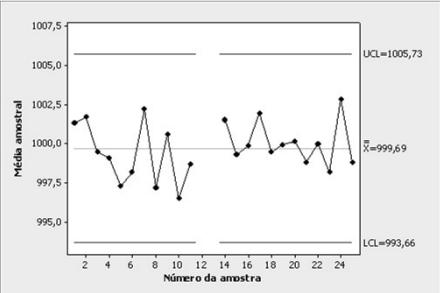
Comentários

- O ponto $\bar{X}_{13} > LSC_{\bar{X}}$
- Comentários similares àqueles efetuados para R_{12}
 - ✓ Elimina-se \bar{X}_{13}

Controle Estatístico de Qualidade -2020

32

- Gráfico de \bar{X} :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{X} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 1005,73$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{X} = 999,69$$

$$LIC_R = \bar{X} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,66$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

34

- Comentários:

✓ As médias dos 23 subgrupos distribuem-se aleatoriamente em torno da média e nenhuma excede os limites de controle

✓ Considera-se o processo ajustado e estável

Controle Estatístico de Qualidade -2020

35

Estimativa dos Parâmetros – Recomendações

- Se identificada a causa especial e seu período de atuação, todas as amostras afetadas devem ser eliminadas
 - ✓ Mesmo que nem todas estejam na zona de ação
- Se houver poucas amostras restantes após descarte das afetadas
 - ✓ Prolongar o período de coleta das amostras destinadas à construção dos limites de controle

Controle Estatístico de Qualidade -2020

36

- Nem sempre é possível a causa especial que atuou no passado

✓ É ainda mais difícil saber quais as amostras afetadas

- Importante:

✓ Mesmo com o processo sob controle, há uma maior chance de um ou mais pontos caírem na zona de ação do gráfico, quando houver muitas amostras disponíveis

(maior que 25 ou 30 subgrupos)

Controle Estatístico de Qualidade -2020

37

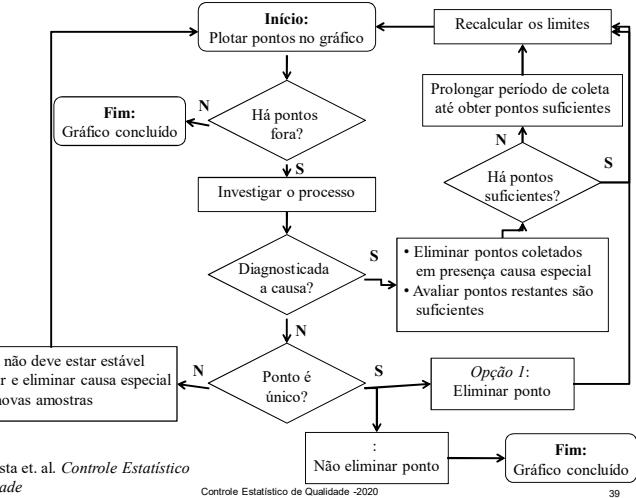
- Recomendação:

- ✓ Se em uma sequência de 25 ou 30 pontos apenas um estiver fora dos limites de controle e não for possível diagnosticar nenhuma causa especial, o melhor é mantê-lo, construindo o gráfico de controle com base em todas as amostras

Controle Estatístico de Qualidade -2020

38

- Estabelecimento dos limites dos gráficos:



Fase 2 – Monitoramento do Processo

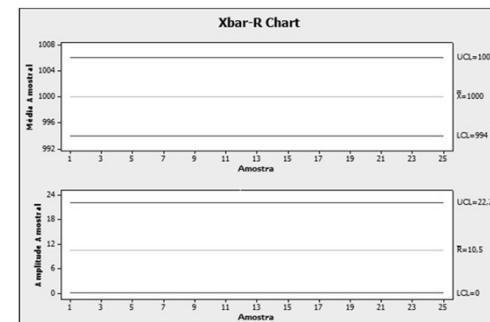
- Estimação dos parâmetros (fase 1)
 - ✓ só deve ser encerrada quando o processo encontrar-se estável e ajustado
- Monitoramento do processo (fase 2)
 - ✓ Os limites de controle não devem mais ser alterados, a não ser que o processo produtivo sofra alterações permanentes
 - ✓ Decisão para detecção e eliminação de causa especial
 - Basta um valor de \bar{X} ou de R estar na zona de ação para que decida-se pela intervenção no processo

Controle Estatístico de Qualidade -2020

40

- Volume de Sacos de Leites

- ✓ Gráfico \bar{X} e R para monitoramento do processo



Limites de Controle – Notação Alternativa

- Limites de Controle do Gráfico \bar{X} :

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ LM_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} \\ LIC_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{aligned}$$

- Limites de Controle do Gráfico R

$$\begin{aligned} LSC_R &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R} & D_3 &= 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \\ LM_R &= \bar{R} & D_4 &= 1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \\ LIC_R &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \bar{R} \end{aligned}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

- Apêndice VI: Fatores para Construção de Gráficos de Controle para Variáveis

✓ Montgomery, pág. 489

Observações na Amostra, n	Gráficos para Médias			Gráficos para Desvios Padrão			Gráficos para Amplitudes			Fatores para Limites de Controle						
	Fatores para Limites de Controle			Fatores para Linha Central			Fatores para Limites de Controle			Fatores para Linha Central						
	A	A ₁	A ₂	c ₁	M _{c1}	B ₁	B ₂	B ₃	d ₁	I _{d1}	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄		
2	2,121	1,880	2,659	0,799	1,2533	0	3,207	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,666	0	3,267
3	1,732	1,023	1,954	0,882	1,1284	0	2,566	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	0,729	1,628	0,923	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,568
5	1,342	0,579	1,427	0,951	1,0601	0	2,049	0	1,869	1,970	0,4243	0,849	0	4,959	0	2,115
6	1,224	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,008
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3695	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	0,9605	1,0385	0,185	1,813	0,178	1,751	2,751	0,3496	0,826	0,180	5,346	0,040	1,840
9	1,001	0,326	1,032	0,9691	1,0317	0,209	1,761	0,203	1,632	2,707	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0252	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,797	0,687	5,541	0,261	1,746
12	0,866	0,266	0,886	0,9784	1,0252	0,354	1,641	0,303	1,603	3,278	0,3072	0,792	0,594	5,623	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	0,9798	1,0210	0,382	1,616	0,374	1,585	3,336	0,2990	0,770	1,023	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,220	0,786	0,9814	1,0189	0,428	1,579	0,406	1,543	3,484	0,2875	0,753	1,203	5,743	0,347	1,651
16	0,750	0,212	0,763	0,9815	1,0189	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,620
18	0,707	0,194	0,716	0,9854	1,0148	0,482	1,516	0,475	1,496	3,640	0,2737	0,734	1,425	5,859	0,397	1,609
19	0,688	0,186	0,695	0,9869	1,0141	0,501	1,497	0,492	1,476	3,681	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,499	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,649	0,9882	1,0119	0,540	1,454	0,528	1,448	3,821	0,2617	0,718	1,687	5,981	0,435	1,565
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Para $n > 25$:

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_1 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_1 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$$

Controle Estatístico de Qualidade -2020

$$B_2 = c_4 = \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_5 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4^a. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, 1993.