

Fundamentos do Controle Estatístico do Processo

Introdução

Roteiro

1. Introdução
2. Monitoramento de Processos
3. Etapa Inicial: Estabilização e Ajuste do Processo
4. Estimação da Variabilidade
5. Referências

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

2

Variabilidade do Processo

- Relaciona-se com a diferença entre as unidades produzidas
 - ✓ Variabilidade grande
Fácil observar as diferenças
 - ✓ Variabilidade pequena
Difícil observar as diferenças

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

4

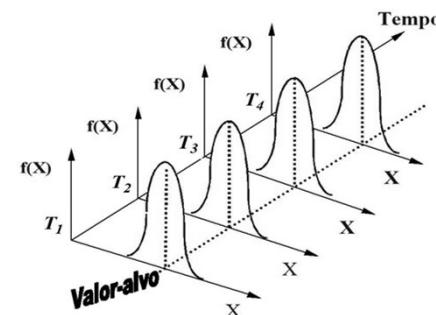
Variabilidade Natural

- Resultados de pequenas perturbações (ou causas aleatórias)
 - ✓ Não é possível ser evitada
 - ✓ Estado de controle estatístico (sob controle)
 - Apresenta apenas variabilidade natural
 - ✓ Isento de causas especiais

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

5

- Processo sob Controle



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

6

Causa Especial

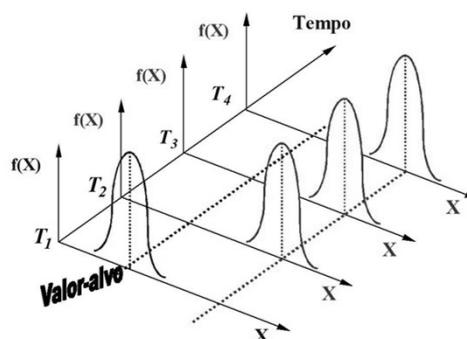
- Problema ou modo anormal de operação do processo
 - ✓ Desloca a distribuição da variável aleatória de interesse
 - Tira a média do valor-alvo e/ou aumenta sua dispersão
 - ✓ Pode ser corrigida ou eliminada
 - ✓ Processo fora de controle
 - Opera em presença de causas especiais

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

7

- Processo fora de controle:

✓ Desajuste: causa especial desloca a média do processo

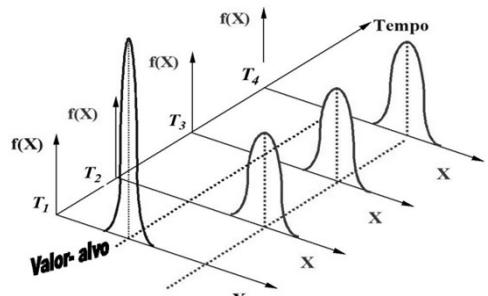


Controle Estatístico de Qualidade - 2020

8

- Processo fora de controle:

- ✓ Desajuste e instabilidade: causa especial desloca a média e aumenta a variabilidade do processo



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

9

Monitoramento de Processos

Monitoramento de Processos

- Os processos devem ser monitorados para detectar a presença de causas especiais
 - ✓ Detectada sua presença, investigar a causa especial
 - ✓ Identificada, intervém-se para eliminá-la

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

15

Gráficos de Controle

- Principal ferramenta para monitorar processos
 - ✓ Análise periódica
 - amostra de n itens retiradas a cada intervalo de tempo
 - ✓ Forma do gráfico de controle:
 - Linha média
 - Limites de controle (superior e inferior)

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

16

Teste de Hipóteses e Gráficos de Controle

- Gráficos de controle:
 - ✓ representação gráfica de uma estatística amostral $g(\bar{X})$ como uma função do tempo
- Sua aplicação é equivalente a executar repetidamente um teste de hipóteses
 - ✓ Teste de hipóteses:
 - H_0 : processo de produção está sob controle estatístico
 - H_1 : processo de produção está fora de controle estatístico

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

17

- Região de rejeição para H_0 :
 - ✓ Conjunto de todas as realizações da estatística de teste que se encontram fora dos limites de controle
- Regra de decisão do teste:
 - ✓ Intervém-se no processo se a estatística de teste $g(\bar{X})$ se encontra sob ou fora dos limites de controle
 - ✓ Não há nenhuma ação se a estatística de teste $g(\bar{X})$ se encontra dentro dos limites de controle

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

18

Hipótese Nula

- H_0 é uma afirmação sobre o parâmetro de locação (μ, λ, p) ou sobre o parâmetro de escala (σ) da característica de qualidade monitorada
 - ✓ Esses valores podem ser:
 - Valor nominal (valor-alvo, valor de referência), ou
 - Estimativa obtida a partir de uma pré-execução do processo

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

19

Escolha da Estatística de Teste

- Depende do aspecto monitorado do processo:
 - ✓ Locação ou dispersão de uma característica de qualidade
- Outros critérios:
 - ✓ Eficiência da estatística de teste
 - ✓ Tempo e complexidade envolvidos nos cálculos da estatística de teste
 - ✓ Qualificações exigidas do pessoal da inspeção

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

20

- Importante:

- ✓ Um gráfico de controle não identifica quais as causas especiais atuando no processo
- ✓ Gráficos de controle processam e dispõem informações que podem ser utilizadas na identificação

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

21

Regra de Decisão

- Processo sob controle

- ✓ Os pontos distribuem-se aleatoriamente em torno da linha média

- ✓ Não se intervém no processo

- Suspeita de ocorrência de causa especial

- ✓ Um dos pontos cai na região de ação do gráfico

- ✓ Afastamento excessivo da linha média

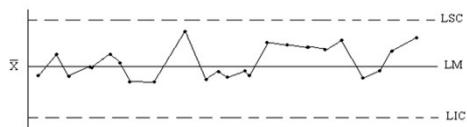
- ✓ Intervém-se no processo

- Identificação e ação corretiva

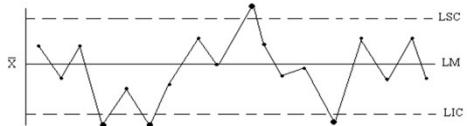
Controle Estatístico de Qualidade - 2020

22

- Processo sob controle



- Processo fora de controle



- ✓ Pontos fora dos limites de controle

- ✓ Pontos não apresentam configuração aleatória

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

23

Exemplo

- Envasamento de saco de leite - Laticínio

- ✓ Característica de qualidade: Volume (ml)

- ✓ Amostras de tamanho 5 ($n = 5$) coletadas a cada 30 min ($h = 30$)

- ✓ Estatísticas amostrais:

- Média da i -ésima amostra: \bar{X}_i

- Amplitude da i -ésima amostra: R_i

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

24

- Valores amostrais

Amostra	X _{i1}	X _{i2}	X _{i3}	X _{i4}	X _{i5}	\bar{X}	R
1	1001,7	1004,0	1004,8	996,3	1004,3	1002,2	8,5
2	999,7	1000,3	1003,2	993,9	998,9	999,2	9,3
3	990,9	1004,0	1003,0	1004,0	1002,0	1000,8	13,1
4	1000,7	1007,3	998,1	995,5	994,9	999,3	12,4
5	1000,7	998,3	998,9	997,8	1001,9	999,5	4,1
6	998,6	993,7	1002,8	995,5	994,1	996,9	9,1
7	1002,7	1010,5	990,5	992,5	1003,0	999,8	20,0
8	1000,4	1004,0	1003,0	999,8	997,2	1000,9	6,8
9	999,9	1005,6	996,1	1005,5	998,1	1001,0	9,5
10	994,3	993,2	1005,8	996,4	996,7	997,3	12,6
11	997,4	997,1	998,0	995,6	1005,8	998,8	10,2
12	1003,5	992,3	1000,8	1000,0	1001,2	999,6	11,2
13	1003,4	1004,6	1001,3	997,3	1005,8	1002,5	8,5
14	997,7	1004,6	997,0	1001,0	1003,9	1000,8	7,6
15	1012,0	1007,0	1002,7	1008,0	1005,0	1006,9	9,3

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

25

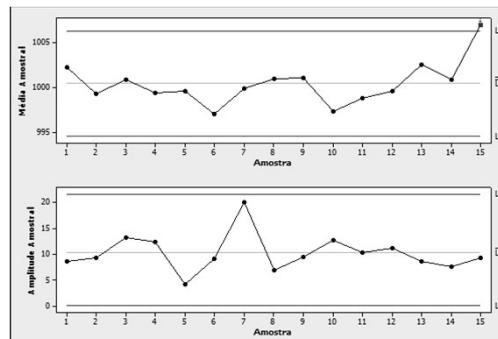
Construção de Gráficos de Controle \bar{X}

- Parâmetros do processo sob controle
 - ✓ μ_0 : média da distribuição de X
 - ✓ σ_0 : desvio-padrão da distribuição de X
- Parâmetros do processo determinam os limites de controle
 - ✓ A média deve coincidir com o valor-alvo especificado
 - ✓ Se não estiver definido, deve ser estimado
 - ✓ O desvio-padrão do processo é estimado
 - ✓ As estimativas devem ocorrer em período em que o processo permanece isento de causas especiais

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

27

Gráfico de Controle de \bar{X} e R



✓ Afastamento de \bar{X}_{15} deve-se provavelmente a causa especial

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

26

Uso dos Gráficos de Controle

- Valores observados da variável de interesse devem ser independentes
- Há processos em que os valores da variável X são correlacionados entre si
- É possível usar os gráficos de Shewhart mesmo quando a distribuição não for normal

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

28

Tipos de Gráficos de Controle

- Gráfico de Variáveis
 - ✓ Monitoram características de qualidade medidas em uma escala contínua
- Gráfico de Atributo:
 - ✓ Monitoram característica de qualidade categórica ou de contagem

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

29

Gráficos de Variável

- ✓ Gráfico \bar{X}
- ✓ Gráfico R
- ✓ Gráfico S
- ✓ Gráfico de medidas individuais
- ✓ Gráfico de amplitude móvel
- ✓ Outros tipos
 - Gráfico CUSUM
 - Gráfico EWMA

Em geral, têm como pressupostos normalidade e independência

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

30

Gráficos de Atributos

- Gráfico p
 - ✓ Monitora proporção de defeituosos
- Gráfico np
 - ✓ Monitora número de itens não-conformes
- Gráfico c
 - Modelo Poisson
 - ✓ Monitora número de não-conformidades em unidade de produto
- Gráfico u
 - ✓ Monitora número médio de não conformidades por unidade de produto

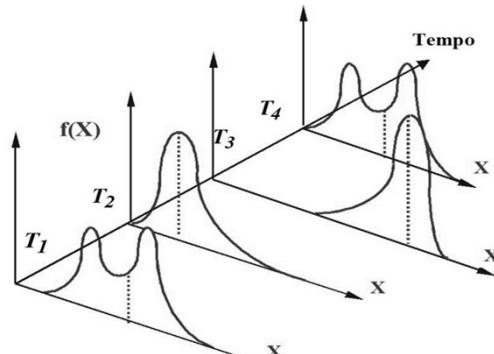
Controle Estatístico de Qualidade - 2020

31

Etapa Inicial: Estabilização e Ajuste do Processo

Processo Instável

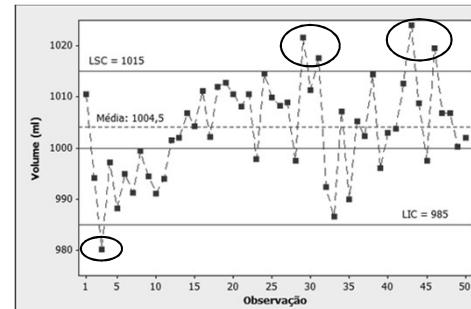
- Distribuição do volume de leite (processo instável)



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

33

- Limites de especificação: 1000 ± 15 (ml)
- Volume medido a cada 15 min.



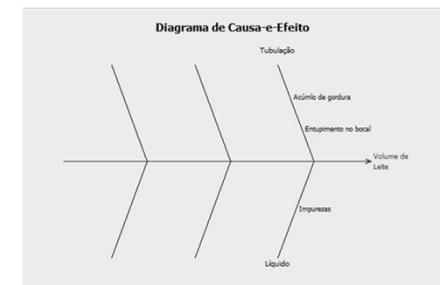
✓ A característica de qualidade não é estável

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

34

Ajuste do Processo – Diagnóstico

- Diagrama de Causa e Efeito
 - Causas especiais que afetam o volume de leite



- Acúmulo de gordura
- Entupimento no bocal
- Impurezas no líquido

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

35

Ajuste do Processo – Correção/Prevenção

- Após o diagnóstico, eliminam-se as causas especiais

Causa Especial

- Gordura na tubulação
- Entupimento do bocal
- Impurezas no leite

Medida Corretiva/Preventiva

- Limpeza mensal da tubulação
- Troca semanal do bocal
- Utilização de filtros

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

36

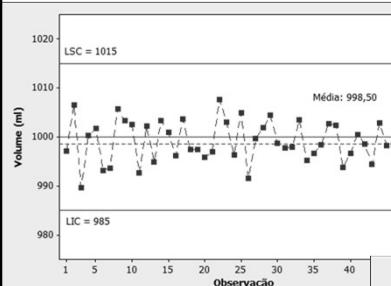
Processo Estável e Ajustado

- ✓ Os valores de X devem vir de uma distribuição com média constante
 - Coincidindo com o valor-alvo
- ✓ Valores variam em torno da média com maior incidência de pontos mais próximos de seu valor
 - Pontos afastados são menos frequentes
- ✓ Dispersão limitada e com padrão aleatório
- ✓ Não deve haver dependência entre valores consecutivos de X

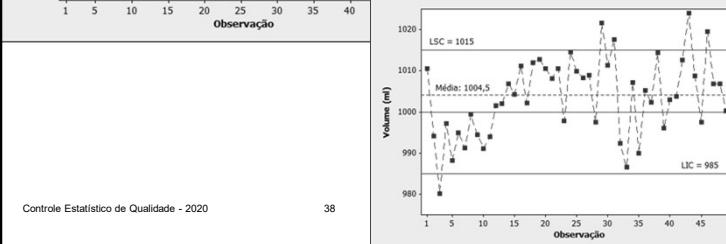
Controle Estatístico de Qualidade - 2020

37

• Gráfico de Processo Estável e Ajustado – Leite



Antes



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

38

Estimação da Variabilidade do Processo

Construção do Gráfico de Controle

- μ_0 e σ_0 são desconhecidos e devem ser estimados
- Certeza de processo sob controle durante amostragem
 - ✓ \bar{X} estima μ_0
 - ✓ S^2 estima σ^2
- ✓ Na prática, não se sabe se o processo permanece isento de causas especiais durante amostragem

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

40

Subgrupos Racionais

- Retiram-se pequenas amostras a intervalos de tempos regulares
 - ✓ Cada amostra (ou subgrupo racional) constitue-se de unidades produzidas quase no mesmo instante
 - ✓ Dificilmente ocorrerá uma causa especial durante a formação do subgrupo
 - ✓ O procedimento minimiza a probabilidade de amostra com elementos de populações diferentes

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

41

Importante

- Perturbação entre a retirada de amostras não aumentará a variabilidade **em cada** amostra, mas **entre** amostras
 - ✓ Aumento da variabilidade de média amostrais
- Estima-se a variabilidade do processo com base na dispersão de valores **dentro** da amostra

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

42

Estimação de σ – Desvio-padrão Amostral (S)

- Dada amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n com $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$
 - ✓ S: desvio-padrão amostral $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$
 - ✓ S é viciado para $\sigma \rightarrow E(S) \neq \sigma$
- Se a amostra aleatória provém de uma normal:
 - ✓ $E(S) = c_4 \sigma$, com $c_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
 - ✓ $c_4 < 1, \forall n$, e $c_4 \rightarrow 1$, quando n cresce

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

43

$$\cdot \text{Var}(S) = E(S^2) - [E(S)]^2 = (1 - c_4^2) \sigma^2$$

- Valor aproximado de c_4 :

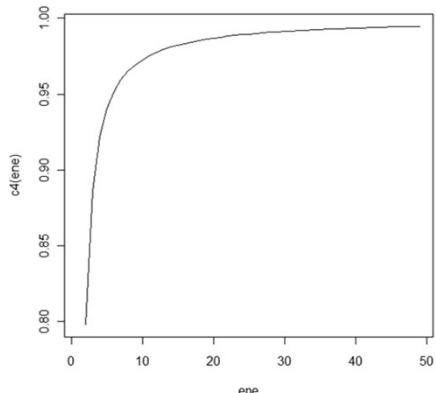
$$c_4 \approx \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

✓ A aproximação melhora a medida em que n cresce

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

45

Comportamento de c_4



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

46

Amplitude Amostral Relativa

- Definida como: $W = \frac{R}{\sigma} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\sigma}$

- Se amostra provém de população normal:

$$W = Z_{(n)} - Z_{(1)}$$

\sqrt{W} é amplitude de amostra de tamanho n de população normal padrão

- Distribuição de W relaciona-se com distribuição das estatísticas de ordem da normal padrão.

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

47

Distribuição Normal Padrão

- Parâmetros:
 - Média: $\mu = 0$
 - Desvio padrão: $\sigma = 1$
- Função de densidade de probabilidade:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\}$$

- Função de distribuição acumulada:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} dx$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

48

Estatística de Ordem da Normal Padrão

- Amostra aleatória Z_1, Z_2, \dots, Z_n

- Estatísticas de ordem:

$$Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$$

- Função de densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n),$$

para $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

49

- Função de densidade marginal da r-ésima estatística de ordem:

$$f_{Z(r)}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [\Phi(x)]^{r-1} [1-\Phi(x)]^{n-r} \varphi(x)$$

- Função de densidade marginal entre as r-ésima e a s-ésima estatísticas de ordem:

$$f_{Z(r), Z(s)}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [\Phi(x)]^{r-1} [1-\Phi(x)]^{n-r} [\Phi(x) - \Phi(y)]^{s-n-1} \varphi(x) \varphi(y),$$

para $r < s$

Amplitudes Relativas Amostrais

$$\checkmark n=2 \quad E(Z_{(2)}) = -E(Z_{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rightarrow E(W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\checkmark n=3 \quad E(Z_{(3)}) = -E(Z_{(1)}) = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \rightarrow E(W) = \frac{6}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\checkmark n=4 \quad E(Z_{(4)}) = -E(Z_{(1)}) = \frac{6}{\pi\sqrt{\pi}} \arctg\sqrt{2}$$

$$\rightarrow E(W) = \frac{12 \arctg\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}$$

$$\checkmark n=5 \quad E(Z_{(5)}) = -E(Z_{(1)}) = \frac{15 \arctg\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} - \frac{5}{2\sqrt{\pi}}$$

$$E(W) = 2 \times \left[\frac{15 \arctg\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} - \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \right]$$

\checkmark Resultados obtidos adotando uma abordagem por equação diferencial

\checkmark Não há expressões explícitas para $n > 5$

\checkmark Fonte: Johnson, N. L.; Kotz, S. e Balakrishnan, N.
Continuous Univariate Distributions

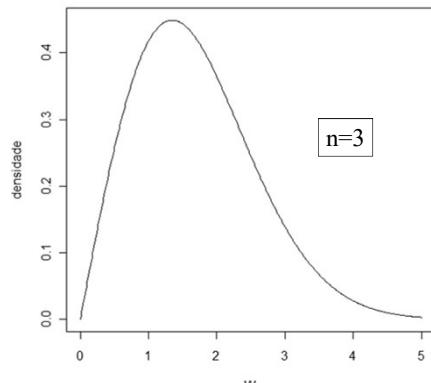
- Função de distribuição acumulada de W

$$F_W(x) = n \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(z+x) - \Phi(z)]^{n-1} \varphi(z) dz$$

- Função de densidade de probabilidade de W:

$$f_W(x) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(z+x) - \Phi(z)]^{n-2} \varphi(z) \varphi(z+x) dz$$

- Gráfico da densidade da amplitude relativa



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

58

Valores de c_4 e d_2

n	c_4	d_2
2	0,798	1,128
3	0,886	1,693
4	0,921	2,059
5	0,940	2,326
6	0,952	2,534
7	0,959	2,704
8	0,965	2,847
9	0,969	2,970
10	0,973	3,078
11	0,975	3,173
12	0,978	3,258
13	0,979	3,336
14	0,981	3,407
15	0,982	3,472

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

62

Estimação de σ – Amplitude Amostral (R)

- Dada amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n com $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$

✓ R: amplitude amostral

$$R = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

✓ R é viciado para $\sigma \rightarrow E(R) \neq \sigma$

- Se a amostra aleatória provém de uma normal:

✓ $E(R) = d_2 \sigma$

✓ \bar{R} é estimador não viesado de $E(R) \rightarrow$

$\frac{\bar{R}}{d_2}$ é não viciado para estimar σ

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

61

Package (IQCC)

✓ comandos:

d2

d3

c4

table.const (d3 não funciona!)

✓ Correção

d3.corr

tabela.corrigida

(scripts próximo slide)

```
> library(IQCC)
> d3(25)
[1] 0.7084408
> c4(25)
[1] 0.9696404
> tabela.corrigida(25)
      d2      d3      c4
2 1.128379 0.8525025 0.7978846
3 1.692569 0.8883680 0.8862269
4 2.058751 0.8798082 0.9213177
5 2.325929 0.8640819 0.9399856
6 2.534413 0.8480397 0.9515329
7 2.704357 0.8332053 0.9593688
8 2.847201 0.8198311 0.9650305
9 2.970026 0.8078343 0.9693107
10 3.077505 0.7970507 0.9726593
11 3.172873 0.7873146 0.9753501
12 3.258455 0.7784783 0.9775594
13 3.335980 0.7704162 0.9794056
14 3.406763 0.7630231 0.9809714
15 3.471827 0.7562114 0.9823162
16 3.531983 0.7499081 0.9834835
17 3.587884 0.7440518 0.9845064
18 3.640064 0.7385908 0.9854100
19 3.688963 0.7334815 0.9862141
20 3.734949 0.7286908 0.9869343
21 3.778336 0.7241733 0.9875829
22 3.819385 0.7199148 0.9881703
23 3.858323 0.7158868 0.9887045
24 3.895348 0.7120682 0.9891927
25 3.930629 0.7084408 0.9896404
```

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

63

- Ajuste no cálculo de d_3 para correção na tabela

```

d3.corr<-function (n)
{
  d2 <- d2(n)
  e <- vector()
  for (i in 1:length(n)) {
    int <- integrate(function(w) {
      w * (1 - ptukey(w, n[i], Inf))
    ), 0, Inf)
    e <- append(e, sqrt(2 * int[[1]] - (d2[i])^2))
  }
  return(e)
}

tabela.corrigida<- function (n)
{
  n <- 2:n
  u <- matrix(c(d2(n), d3.corr(n), c4(n)),
              max(n)-1, 3, byrow = FALSE)
  colnames(u) <- c("d2", "d3", "c4")
  rownames(u) <- n
  return(u)
}

```

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

64

Amplitude e Desvio Padrão Amostrais

- Antes do advento do computador, a utilização da amplitude para estimar σ era popular pela facilidade de cálculo
- Em geral o estimador baseado em S é preferível
- Se o tamanho da amostra é relativamente pequeno, o método da amplitude funciona bastante bem

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

65

- Eficiência relativa de R comparada com S

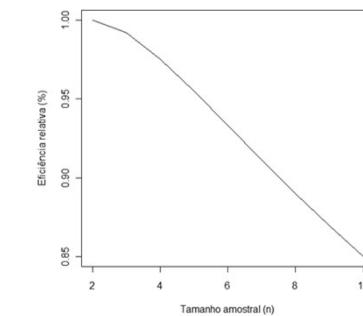
$$\begin{aligned}
 e_\sigma(\hat{\sigma}_S, \hat{\sigma}_R) &= \frac{\text{EQM}(\hat{\sigma}_S)}{\text{EQM}(\hat{\sigma}_R)} \\
 &= \frac{\text{bias}(\hat{\sigma}_S)^2 + \text{Var}(\hat{\sigma}_S)}{\text{bias}(\hat{\sigma}_R)^2 + \text{Var}(\hat{\sigma}_R)} \\
 &= \frac{\text{Var}\left(\frac{\bar{S}}{c_4}\right)}{\text{Var}\left(\frac{\bar{R}}{d_2}\right)} = \frac{\frac{(1-c_4^2)}{c_4^2}\sigma^2}{\frac{d_3^2}{d_2^2}\sigma^2} \\
 e_\sigma(\hat{\sigma}_S, \hat{\sigma}_R) &= \frac{(1-c_4^2)d_2^2}{c_4^2 d_3^2}
 \end{aligned}$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

66

- $e_\sigma(\hat{\sigma}_S, \hat{\sigma}_R) = \frac{[1 - c_4(n)^2] d_2(n)^2}{c_4(n)^2 d_3(n)^2}$ depende de n :

Tamanho Amostral (n)	Eficiência Relativa
2	1,000000
3	0,991860
4	0,975189
5	0,954761
6	0,933035
7	0,911231
8	0,889948
9	0,869463
10	0,849897



Controle Estatístico de Qualidade - 2020

67

- Comentários:

- ✓ Para valores moderados de n ($n \geq 10$), o método da amplitude perde eficiência rapidamente
 - ignora toda a informação da amostra compreendida entre máximo e mínimo
- ✓ Para valores pequenos de n ($n \leq 6$) ele funciona satisfatoriamente

Simulações

Estimação da Variabilidade – Exemplo

- Simulação de Processo sob Controle:
 - ✓ Distribuição: $X \sim N(1000, 4)$
 - ✓ $m = 8$ – quantidade de subgrupos
 - ✓ $n = 5$ – tamanho do subgrupo

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	$X_{i,3}$	$X_{i,4}$	$X_{i,5}$	\bar{X}_i	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
						999,8	9,2	3,9

Estimador S_A

- Considera uma única amostra de mn elementos

$$S_A = \frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2}{mn - 1}}$$

- ✓ x_{ij} : j -ésimo elemento do i -ésimo subgrupo
- ✓ n : tamanho do subgrupo
- ✓ m : número de subgrupos
- ✓ média global: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}$
- ✓ c_4 : correção de vício
depende de mn

✓ Estimativa de $S_A : X_{ij} \sim N(1.000, 4)$

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{-bar}	R_i	s_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
$s = 4,0657$		Médias			999,8	9,2	3,9	

$$S_A = \frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2}{mn - 1}}$$

$$S_A = \frac{1}{c_4(40)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^5 (X_{ij} - 999,8)^2}{8(5) - 1}} = \frac{4,0657}{0,9936} = 4,09$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

73

Estimador S_B

- Considera desvio-padrão das médias dos m subgrupos

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m - 1}} \right] \sqrt{n}$$

$$\checkmark \sigma = \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$$

$$\checkmark [.] : \text{estimador de } \sigma_{\bar{X}}$$

$$\checkmark c_4 : \text{correção de vício}\\ \text{depende de } m$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

74

✓ Estimativa de S_B

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{-bar}	R_i	s_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
$s = 1,8208$		Médias			999,8	9,2	3,9	

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m - 1}} \right] \sqrt{n}$$

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4(8)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (\bar{X}_i - 999,8)^2}{8 - 1}} \right] \sqrt{5} = \frac{1,8208}{0,96503} \sqrt{5} = 4,22$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

75

Estimador S_C

- Considera o desvio-padrão dos m subgrupos

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$\checkmark \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \text{ com } S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n - 1}}$$

$$\checkmark c_4 : \text{correção de vício}\\ \text{depende de } n$$

$$\checkmark \bar{S} \text{ é mais preciso que } S_i \text{ para estimar } c_4 \sigma \\ \text{variância } m \text{ vezes menor}$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

76

✓ Estimativa de S_C

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{bar}	R_i	s_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
	Médias					999,8	9,2	3,9

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4(5)} = \frac{3,880}{0,9399} = 4,13$$

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \text{ com } S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

77

Estimador S_D

- Considera a amplitude amostral R

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\sqrt{\bar{R}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

✓ R_i : amplitude amostral do i -ésimo subgrupo

✓ d_2 : correção de vício
depende de n

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

78

✓ Estimativa de S_D

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{bar}	R_i	s_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
	Médias					999,8	9,2	3,9

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{9,2}{2,32593} = 3,94$$

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

79

✓ Estimação Variabilidade do Processo (σ_0) – Resumo

Variabilidade entre amostras		Variabilidade dentro Amostras	
$S_A = 4,0918462$	$S_B = 4,21896$	$S_C = 4,12796$	$S_D = 3,93929$
$s_{\text{global}} = 4,066$	$s_{\text{médias}} = 1,8208$	$s_{\text{bams}} = 3,880$	$R_{\text{bams}} = 9,2$
$c4(40) = 0,99361$	$c4(8) = 0,96503$	$c4(5) = 0,93999$	$d2(5) = 2,32593$
$m \times n = 40$	$m = 8$	$n = 5$	

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{bar}	R_i	s_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
	Médias					999,8	9,2	3,9

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

80

Estimação da Variabilidade – Exemplo

- Simulação de Processo com Influência de Causa Especial

✓ $X \sim N(1000,4)$ para $i \neq 2$ e $X \sim N(1010,4)$ para $i=2$

✓ $m=8$

✓ $n = 5$

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

82

- Estimação Variabilidade do Processo (σ_0)

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_{bar}	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1008,2	1009,3	1010,8	1008,4	1010,8	1009,5	2,6	1,3
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
					Médias	1001,2	8,7	3,7
					Variabilidade entre amostras	Variabilidade dentro Amostras		
$S_A = 5,1136338$		$S_B = 8,70713$		$S_C = 3,98076$		$S_D = 3,75656$		
$S_{\text{global}} = 5,081$		$S_{\text{médias}} = 3,75778$		$S_{\text{barra}} = 3,742$		$R_{\text{barra}} = 8,7$		
$c4(40) = 0,99361$		$c4(8) = 0,96503$		$c4(5) = 0,93999$		$d2(5) = 2,32593$		
$m \times n = 40$		$m = 8$		$n = 5$				

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

83

Simulações – Comparação

Causa Especial
isenso com

Comentários

S_A	4,1	5,1	Afetados pela causa especial
S_B	4,2	8,7	(superestimam σ_0)
S_C	4,1	4,0	Não afetados pela causa especial
S_D	3,9	3,8	Mais robustos a desajustes da média

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

84

Comentários

- S_A e S_B são muito afetados por deslocamentos da média

✓ S_A : baseado na dispersão de todos os pontos

✓ S_B : baseado nas diferenças entre médias amostrais

- S_C e S_D são insensíveis a causas especiais que altera, a média do processo

✓ Baseiam-se apenas na dispersão dentro das amostras

Controle Estatístico de Qualidade - 2020

85

- Para subgrupos grandes ($n \geq 10$)
 - ✓ S_C usa mais informações que S_D (apenas duas)
 - ✓ S_C é mais eficiente que S_D
- Para subgrupos pequenos ($n < 10$)
 - ✓ S_D é praticamente tão preciso quanto S_C
- S_D será adotado como estimador de σ por ser robusto a alterações na média e por simplicidade de cálculo
 - ✓ Estimador mais usado em CEP

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4^a. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, 1993.