Análise Multivariada

Lupércio França Bessegato
Dep. Estatística/UFJF

Roteiro

Análise Fatorial

Análise Fatorial

- Objetivo:
  - √ Descrever as relações de covariância entre muitas variáveis em termos de poucas quantidades aleatórias subjacentes e não observáveis
- Motivação:
  - √ Variáveis de um grupo altamente correlacionadas entre si, mas com pequenas correlações de outros grupos
  - √ É concebível que cada grupo de variáveis represente um fator (ou construto) que seja o responsável pelas correlações observadas

- Análise fatorial:
  - √ Pode ser considerada uma extensão da Análise de Componentes Principais
    - – Ambas são tentativas de aproximar S.
    - – A aproximação baseada em Análise Fatorial é mais elaborada
  - √ Questão principal:
    - – Dados são consistentes com a estrutura prescrita?

- Análise Fatorial Exploratória:
  - √ Busca encontrar os fatores subjacentes às variáveis originais amostradas
  - √ Em geral, efetuada quando não se tem noção clara da quantidade de fatores do modelo e nem do que representam
- Análise Fatorial Confirmatória:
  - √ Tem-se em mãos um modelo fatorial pré-especificado (modelo hipotético) e deseja-se verificar se é aplicável ou consistente com os dados amostrais de que dispõe

Modelo Fatorial Ortogonal via Matriz de Correlações

- Seja o vetor aleatório

$$\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \ldots, X_p].$$

com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$, matriz de covariâncias é $\boldsymbol{\Sigma}$, e matriz de correlações $\mathbf{P}$.

- Sejam as variáveis originais padronizadas:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}}$$

  - √ **P** é a matriz de covariâncias do vetor aleatório **Z**, cujos componentes são as variáveis padronizadas

- Modelo Fatorial Ortogonal
  - √ Construído via a matriz de correlação populacional
  - √ Relaciona linearmente as variáveis padronizadas e os m fatores comuns (que são desconhecidos)
  - √ Fatores são variáveis independentes

- Equações do modelo:

$$Z_1 = l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \cdots + l_{1m}F_m + \epsilon_1$$
$$Z_2 = l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \cdots + l_{2m}F_m + \epsilon_2$$
$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$Z_p = l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \cdots + l_{pm}F_m + \epsilon_p$$

√ Em notação matricial:

$$\mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{LF} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

$$\mathbf{V}^{-1/2} = \text{diagonal}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\right).$$

$$\mathbf{L}_{p\times m} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{p1} & l_{p2} & \ldots & l_{pm} \end{bmatrix}. \quad \mathbf{F}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}. \quad \boldsymbol{\epsilon}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{bmatrix}.$$

- Modelo fatorial:

$$\mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{LF} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

√ **F**: vetor aleatório contendo m fatores
  - Essas variáveis latentes precisam ser identificadas

√ **ε**: vetor dos erros aleatórios
  - Erros de medida e variação de Z_i que não é explicada pelos fatores comuns

√ L: matriz de loadings fatoriais
  - l_{ij}: representa o grau de relacionamento entre Z_i e F_j.

√ O modelo de análise fatorial assume que as variáveis Z_i estão relacionadas linearmente com os fatores
  - Variáveis originais padronizadas são representadas por p+m variáveis não observáveis

Modelo de Fatores Ortogonais

- Suposições:
  i. Todos os fatores tem média zero $\mathrm{E}[\mathbf{F}] = \mathbf{0}$.
  ii. Todos os fatores são não correlacionados e tem variância um. $\mathrm{Cov}[\mathbf{F}] = \mathbf{I}_m$.
  iii. Todos os erros tem média igual a zero $\mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = \mathbf{0}$.
  iv. Erros são não correlacionados entre si e não necessariamente tem a mesma variância

$$\mathrm{Cov}[\boldsymbol{\epsilon}] = \text{diagonal}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p). \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Var}[\epsilon_j] = \psi_j \\ \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j. \end{array}$$

v. Os vetores **e** e **F** são independentes

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}_{p\times 1}, \mathbf{F}_{m\times 1}) = \mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{F}'] = \mathbf{0}.$$

√ **F** e **ε** são duas fontes de variação distintas, relacionadas às variáveis padronizadas Z_i, não havendo qualquer relacionamento entre estas fontes de informação.

- Assumido o modelo, **P** pode ser reparametrizada

$$\mathbf{P}_{p\times p} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\Psi}.$$

√ O objetivo é encontrar as matrizes $\mathbf{L}_{pxm}$ e $\boldsymbol{\psi}_{pxp}$ que possam representar a matriz $\mathbf{P}_{pxp}$.
  - Há matrizes de correlação que não podem ser decompostas na forma do modelo

- Consequências da decomposição fatorial de **P**:
  - √ Variância de Z_i é decomposta em duas partes:

$$\mathrm{Var}[Z_i] = h_i^2 + \psi_i$$
$$\text{onde } h_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \cdots + l_{im}^2.$$

    - – h_i^2: comunalidade
      - variabilidade explicada pelos m fatores que é uma fonte comum de variação de Z_i.
    - – ψ_i: variância específica
      - Parte da variabilidade de Zi associada apenas ao erro aleatório

√ Covariâncias entre variáveis e fatores

$$\mathrm{Cov}(Z_i, Z_k) = l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k1} + \cdots + l_{im}l_{km},\ i, k = 1, 2, \ldots, p, i \neq k.$$
$$\mathrm{Cov}(Z_i, F_j) = \mathrm{Corr}(Z_i, F_j) = l_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, p \text{ e } i = 1, 2, \ldots, m.$$

√ Proporção da variância total explicada pelo fator F_j:

$$\text{Proporção explicada}_{F_j} = \frac{\sum_{i=1}^{p} l_{ij}^2}{p}.$$

Escolha do Número de Fatores m

- Critério 1:
  - √ Análise da proporção de variância total relacionada com cada autovalor
  - √ Permanecem aqueles autovalores que representam maiores proporções de variância total
  - √ m = quantidade de autovalores retidos

- Critério 2:
  - √ Permanecem os autovalores maiores que 1
  - √ m = quantidade de autovalores retidos
  - √ Ideia básica do critério:
    - – Mantem no sistema nas novas dimensões pelo menos a informação da variância de uma variável original

- Critério 3:
  - √ Observação do gráfico scree plot
  - √ Valor de m é igual ao número de autovalores anteriores ao 'ponto de salto'.
- Importante:
  - √ Uma escolha adequada do valor de m deve levar em consideração a interpretabilidade dos fatores
  - √ Deve-se observar também o princípio da parcimônia
    - – Descrição da estrutura de variabilidade do vetor aleatório **Z** com um número pequeno de fatores

- Importante:
  - √ Modelo fatorial ortogonal só pode ser aplicado quando as variáveis originais são correlacionadas entre si
    - – Caso contrário, cada fator ficará relacionado com apenas uma variável original

Métodos de Estimação de L e ψ

- Escolhe-se o valor de m
- Métodos de estimação das matrizes **L** e **ψ**:
  - √ Método de componentes principais
    - – Em geral, utilizado como um análise exploratória dos dados, em termos dos fatores subjacentes
  - √ Método de fatores principais
    - – Refinamento do método das componentes principais
  - √ Método da máxima verossimilhança
    - – Indicado apenas quando **Z** tem distribuição normal

Método das Componentes Principais

- Matrizes **L** e **ψ** serão estimadas por:

$$\hat{\mathbf{L}} = \left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_1, \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{\mathbf{e}}_2, \ldots, \sqrt{\hat{\lambda}_m}\hat{\mathbf{e}}_m\right].$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \text{diagonal}\left(\mathbf{R}_{p\times p} - \hat{\mathbf{L}}_{p\times m}\hat{\mathbf{L}}'_{p\times m}\right).$$

  - √ Aproximação de R

$$\mathbf{R}_{p\times p} \approx \hat{\mathbf{L}}_{p\times m}\hat{\mathbf{L}}'_{p\times m} + \hat{\boldsymbol{\psi}}.$$

- Matriz residual:

$$\mathbf{MRes} = \mathbf{R}_{p\times p} - \left(\hat{\mathbf{L}}_{p\times m}\hat{\mathbf{L}}'_{p\times m} + \hat{\psi}\right).$$

  √ Pode servir como critério de avaliação do modelo
    - Seus valores deveriam ser próximos de zero
    - Matriz é nula somente quando o valor de m é igual a p

  √ Os elementos da diagonal da matriz R são reproduzidos exatamente pela reprodução do modelo
    - O mesmo não ocorre para os outros elementos da matriz **R** (covariâncias das variáveis Z_i e Z_j)

- Método das componentes principais na estimação de **LL**' e $\boldsymbol{\psi}$.

$$\text{Proporção explicada}_{F_j} = \frac{\sum_{i=1}^{p} l_{ij}^2}{p}.$$

  √ Representa o quanto cada fator consegue captar da variabilidade original das variáveis Z_i.

Exemplo 9.3 – Preferência de Consumidor

- Amostra aleatória de consumidores pontuando atributos de novo produto:

  √ Respostas em escala semântica de 7 valores

  √ X_1: Gosto

  √ X_2: Preço

  √ X_3: Aroma

  √ X_4: Adequado para lanche

  √ X_5: Fornece muita energia

  √ Dados: *BD_multivariada.xls/preferencia_consumidor*

- Solução por Componentes Principais:

	Loadings Estimados							
	F1		F2		Comunalidade		Variância Específica	
Variável	e_{i1}	l_{i1}	e_{i1}	l_2		h_i^2		Ψ_i
Gosto	0,331	0,560	0,607	0,816	$(0,560)^2 + (0,816)^2 =$	0,979	1 - 0,979 =	0,021
Preço	0,460	0,777	-0,390	-0,524	$(0,777)^2 + (-0,524)^2 =$	0,879	1 - 0,404 =	0,121
Aroma	0,382	0,645	0,557	0,748	$(0,645)^2 + (0,748)^2 =$	0,976	1 - 0,370 =	0,024
Adequado lanche	0,556	0,939	-0,078	-0,105	$(0,939)^2 + (-0,105)^2 =$	0,893	1 - 0,493 =	0,107
Energético	0,473	0,798	-0,404	-0,543	$(0,798)^2 + (-0,543)^2 =$	0,932	1 - 0,493 =	0,068
Autovalor	2,853		1,806					
	57,1%		93,2%					

  √ Em geral, uma rotação pode mostrar uma estrutura simples (interpretação simples)

- Análise Fatorial da Matriz de Correlações:

Factor Analysis: M1

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Communality
Var 1	0,560	0,816	0,979
Var 2	0,777	-0,524	0,879
Var 3	0,645	0,748	0,976
Var 4	0,939	-0,105	0,893
Var 5	0,798	-0,543	0,932
Variance	2,8531	1,8063	4,6594
% Var	0,571	0,361	0,932

$\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}$ reproduz aproximadamente R

- Cálculo Comunalidades e Resíduos – Minitab:

```
Let C9 = C6*C6 + C7*C7     # Comunalidades
Let C10 = 1- C9            # Variancias Especificas
Diagonal C10 M4            # Matriz \Psi
Subtract M4 M2 M5  # Matriz de residuos
Print M5
```

- Matriz de Resíduos:

Data Display

Matrix M8

0,0000000	0,0126425	-0,0116968	-0,0201455	0,0064418
0,0126425	0,0000000	0,0204813	-0,0749273	-0,0551752
-0,0116968	0,0204813	0,0000000	-0,0275656	0,0011935
-0,0201455	-0,0749273	-0,0275656	0,0000000	-0,0165955
0,0064418	-0,0551752	0,0011935	-0,0165955	0,0000000

Exemplo 9.4 – Ações *New York*

- Taxas de retorno de 5 ações negociadas na Bolsa de New York
  - √ Período: jan/75 a Dez/76
    - Observadas 100 semanas
  - √ Ações:
    - Allied Chemical
    - du Pont
    - Union Carbide
    - Exxon
    - Texaco
  - √ Dados: *BD_multivariada.xls/acoes_NY*

- Vetor de médias amostral ($\bar{x}$)

Descriptive Statistics: allied_chemical; du_pont; union_carbide; exxon; texaco

Variable	Mean
allied_chemical	0,00543
du_pont	0,00483
union_carbide	0,00565
exxon	0,00629
texaco	0,00371

- Matriz de correlações amostral (S)

Correlations: allied_chemical; du_pont; union_carbide; exxon; texaco

	allied_chemical	du_pont	union_carbide	exxon
du_pont	0,577			
union_carbide	0,509	0,598		
exxon	0,387	0,390	0,436	
texaco	0,462	0,322	0,426	0,524

- Análise Fatorial - Solução por Componentes Principais

√ $m = 1$

```
Factor Analysis: allied_chemical; du_pont; union_carbide; exxon; texaco

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable         Factor1  Communality
allied_chemical    0,783        0,614
du_pont            0,773        0,597
union_carbide      0,794        0,631
exxon              0,713        0,508
texaco             0,712        0,507

Variance          2,8565       2,8565
% Var              0,571        0,571
```

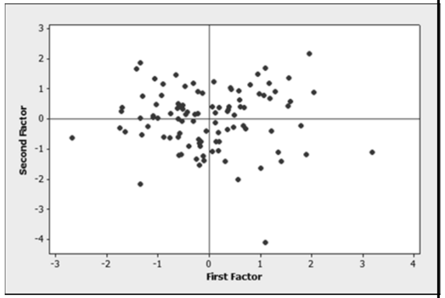
√ $m = 2$

```
Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable         Factor1  Factor2  Communality
allied_chemical    0,783    0,217        0,661
du_pont            0,773    0,458        0,806
union_carbide      0,794    0,234        0,686
exxon              0,713   -0,472        0,731
texaco             0,712   -0,524        0,781

Variance          2,8565   0,8091       3,6656
% Var              0,571    0,162        0,733
```


- Scores dos fatores

F1	F2
0,145	-0,752
-0,121	-1,229
3,188	-1,110
1,182	0,677
-0,463	1,082
1,899	-1,182
-1,091	0,109
1,096	1,682
-0,581	0,406
-0,892	1,166
0,598	0,637
-1,345	1,876
2,043	0,876
1,581	0,589
0,127	-0,130
1,560	1,365
0,182	-1,064
-0,883	-0,613
-0,613	0,359
1,102	-4,108
-1,335	0,017
0,573	-2,011
0,987	0,834
-0,126	0,865
-1,645	-0,420

- Plot dos fatores



- Comparação soluções:

	Fatores Comuns				Solução			
	F1		F2		1 fator		2 fatores	
Variável	e_{i1}	l_{i1}	e_{i1}	l_{i2}	h_i^2	Ψ_i	h_i^2	Ψ_i
Allied Chemical	0,464	0,783	0,241	0,217	0,615	0,385	0,661	0,339
Du Pont	0,457	0,773	0,509	0,458	0,596	0,404	0,806	0,194
Union Carbide	0,470	0,794	0,261	0,234	0,630	0,370	0,685	0,315
Exxon	0,422	0,713	-0,525	-0,472	0,507	0,493	0,731	0,269
Texaco	0,421	0,712	-0,582	-0,524	0,507	0,493	0,780	0,220
Autovalor	2,856		0,809		57,1%		73,3%	

√ Componentes obtidos a partir de R

√ % acumulada da solução a dois fatores é bem maior que a da solução a um fator

- Matriz de Correlações

```
Correlation

1,00000  0,57692  0,50866  0,38672  0,46218
0,57692  1,00000  0,59838  0,38952  0,32195
0,50866  0,59838  1,00000  0,43610  0,42563
0,38672  0,38952  0,43610  1,00000  0,52353
0,46218  0,32195  0,42563  0,52353  1,00000
```

- Matriz de Resíduos: $R - \hat{L}\hat{L}' - \hat{\Psi}$

√ $m = 1$

0	-0,028	-0,114	-0,172	-0,096
-0,028	0	-0,015	-0,161	-0,228
-0,114	-0,015	0	-0,130	-0,140
-0,172	-0,161	-0,130	0	0,016
-0,096	-0,228	-0,140	0,016	0

√ $m = 2$

0	-0,128	-0,164	-0,069	0,018
-0,128	0	-0,123	0,055	0,012
-0,164	-0,123	0	-0,019	-0,017
-0,069	0,055	-0,019	0	-0,231
0,018	0,012	-0,017	-0,231	0

√ Para m=2 LL' produz números maiores (principalmente r_{45})

- Interpretação:

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Communality
allied_chemical	0,783	0,217	0,661
du_pont	0,773	0,458	0,806
union_carbide	0,794	0,234	0,686
exxon	0,713	-0,472	0,731
texaco	0,712	-0,524	0,781
Variance	2,8565	0,8091	3,6656
% Var	0,571	0,162	0,733

  - √ F_1: fator de mercado
    (condições econômicas gerais)
  - √ F_2: fator industrial
    - contrasta ações de indústrias químicas e de óleo e gás (diferencia setores)
- Em essência, mesma conclusão de ACP (ex. 8.5)

Método do Fatores Principais

- Também chamado Método de Componentes Principais Iterativo
- Idéia básica:
  - √ Refinar as estimativas de $\mathbf{L}_{pxm}$ e $\boldsymbol{\psi}_{pxp}$.

- Procedimento
  - √ Estimativas iniciais pelo método das componentes principais
  - √ Troca dos elementos da diagonal de **R** pelas comunalidades estimadas
  - √ Novas estimações a partir da matriz **R***
  - √ Substituição dos elementos da diagonal principal pelas comunalidades estimadas
  - √ Procedimento é repetido até que as diferenças entres as comunalidades estimadas sejam desprezíveis

Método da Máxima Verossimilhança

- Só pode ser utilizado quando a forma da distribuição de probabilidades é conhecida
- Suposição:
  - √ Vetor aleatório **X** tem distribuição normal p-variada
  - √ Consequência:
    - Vetor das variáveis padronizadas é normal p-variado
    - Fatores tem distribuição normal multivariada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias $\mathbf{I}_m$
    - Erros tem distribuição normal p-variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\psi}$.

- A função de verossimilhança é expressa como:

$$L(\mathbf{0}, \mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}|^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{z}_j' \left(\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}\right)^{-1} \mathbf{z}_j\right\}.$$

  √ A função de verossimilhança depende da matrizes **L** e **ψ**, através da matriz de correlação **P**.

  √ As estimativas de máxima verossimilhança de $\hat{\mathbf{L}}$ e $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ são as matrizes **L** e **ψ** que maximizam a função de verossimilhança.

  √ Maximização é feita por métodos numéricos

  √ Método mais sofisticado que os métodos de componentes e fatores principais

  – Produz estimativas mais precisas

- Cuidados:

  √ Está fundamentado na suposição de normalidade multivariada dos vetores **Z**, **F** e **ε**.

  – Apenas a normalidade do vetor **Z** pode ser investigada a priori a partir dos dados amostrais

  – Fatores e erros são variáveis aleatórias não observáveis

- Valor de m:

  √ Método de máxima verossimilhança

  – Mudança de valor de m altera as estimativas dos loadings

  √ Método de componentes principais

  – Aumento no valor de m não altera os loadings para os fatores obtidos anteriormente

  √ Quando os dados provêm de distribuição normal multivariada

  – Usar método de componentes principais como análise exploratória dos fatores e estimação do valor provável de m

  – Posteriormente, qualidade da solução inicial poderá ser melhorada pelo uso do método de máxima verossimilhança

- Dados omissos:

  √ São considerados apenas os elementos amostrais com observações completas

  (Análise de componentes principais e análise fatorial)

  √ Caso haja muitas observações com dados omissos em algumas variáveis, deve-se avaliar até que ponto as análises são válidas.

Exemplo 9.4 – Ações *New York*
Solução Máxima Verossimilhança

- Taxas de retorno de 5 ações negociadas na Bolsa de New York
  - √ Período: jan/75 a Dez/76
    - Observadas 100 semanas
  - √ Ações:
    - Allied Chemical
    - du Pont
    - Union Carbide
    - Exxon
    - Texaco
  - √ Dados: *BD_multivariada.xls/acoes_NY*

√ Solução por Máxima Verossimilhança

Factor Analysis: allied_chemical; du_pont; union_carbide; exxon; texaco

```
Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix


Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable         Factor1  Factor2  Communality
allied_chemical    0,687   -0,176        0,503
du_pont            0,704   -0,506        0,751
union_carbide      0,685   -0,234        0,525
exxon              0,620    0,086        0,392
texaco             0,782    0,452        0,816

Variance          2,4338   0,5538       2,9876
% Var              0,487    0,111        0,598
```

√ Solução por Componentes Principais

```
Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix


Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable         Factor1  Factor2  Communality
allied_chemical    0,783    0,217        0,661
du_pont            0,773    0,458        0,806
union_carbide      0,794    0,234        0,686
exxon              0,713   -0,472        0,731
texaco             0,712   -0,524        0,781

Variance          2,8565   0,8091       3,6656
% Var              0,571    0,162        0,733
```


	Máxima Verossimilhança				Componentes Principais			
Variável	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	h_i^2	Ψ_i	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	h_i^2	Ψ_i
Allied Chemical	0,687	-0,176	0,503	0,497	0,783	0,217	0,661	0,339
Du Pont	0,704	-0,506	0,751	0,249	0,773	0,458	0,806	0,194
Union Carbide	0,685	-0,234	0,525	0,475	0,794	0,234	0,685	0,315
Exxon	0,620	0,086	0,392	0,608	0,713	-0,472	0,731	0,269
Texaco	0,782	0,452	0,816	0,184	0,712	-0,524	0,780	0,220
Variância	2,434	0,554	2,988		2,856	0,809	3,663	
% Variância Total	48,7%	11,1%	59,8%		57,1%	16,2%	73,3%	

- √ Proporção da variância total amostral padronizada explicada é maior para a fatoração por componentes principais que por máxima verossimilhança
  - Componentes principais têm a propriedade de otimizar a variância
- √ F_1: *loadings* positivos e grandes
  - não tanto quanto por componentes principais
- √ F_2: sinais consistentes com contraste, mas magnitudes em alguns casos são menores
  - comparação entre Du Pont e Texaco

- Matriz de Resíduos: $R - \hat{L}\hat{L}' - \hat{\Psi}$
  - √ Máxima Verossimilhança

m=2				
0	-0,004	0,004	0,024	-0,004
-0,004	0	0,003	0,004	0,000
0,004	0,003	0	-0,031	0,005
0,024	0,004	-0,031	0	0,000
-0,004	0,000	0,005	0,000	0

  - √ Componentes Principais

0	-0,128	-0,164	-0,069	0,018
-0,128	0	-0,123	0,055	0,012
-0,164	-0,123	0	-0,019	-0,017
-0,069	0,055	-0,019	0	-0,231
0,018	0,012	-0,017	-0,231	0

  - √ Elementos da matriz de resíduos são bem menores que aqueles obtidos pela análise fatorial por componentes principais
  - √ Escolha:
    - Solução por máxima verossimilhança

- Importante:
  - √ Os padrões dos *loadings* fatoriais iniciais estão restritos pela condição de unicidade da estimativa de $\hat{L}'\hat{\Psi}\hat{L} = \Delta$
  - √ Padrões fatoriais úteis frequentemente não são revelados até que os fatores sejam rotacionados

Exemplo 9.6 – Decatlo Olímpico

- Estudo de escores olímpicos de decatlo
  (Linden, 1977)
  - √ 160 observações multivariadas (139 atletas)
  - √ Período: 1948 a 1976
  - √ Escores padronizados para cada um dos 10 eventos
  - √ Análise Fatorial de R por componentes principais e por máxima verossimilhança
  - √ Dados: *BD_multivariada.xls/decatlo*

- √ A distribuição dos scores padronizados são normais ou aproximadamente normais para cada um dos 10 eventos (Linden, 1977)
- √ Variáveis:
  - X_1: 100 m rasos
  - X_2: Salto em distância
  - X_3: Arremesso de peso
  - X_4: Salto em altura
  - X_5: 400 m rasos
  - X_6: 100 m com barreiras
  - X_7: Lançamento de disco
  - X_8: Salto com vara
  - X_9: Lançamento de dardo
  - X_{10}: 1.500 m

- Matriz de Correlações

Matrix M1

1,00	0,59	0,35	0,34	0,63	0,40	0,28	0,20	0,11	-0,07
0,59	1,00	0,42	0,51	0,49	0,52	0,31	0,36	0,21	0,09
0,35	0,42	1,00	0,38	0,19	0,36	0,73	0,24	0,44	-0,08
0,34	0,51	0,38	1,00	0,29	0,46	0,27	0,39	0,17	0,18
0,63	0,49	0,19	0,29	1,00	0,34	0,17	0,23	0,13	0,39
0,40	0,52	0,36	0,46	0,34	1,00	0,32	0,33	0,18	0,00
0,28	0,31	0,73	0,27	0,17	0,32	1,00	0,24	0,34	-0,02
0,20	0,36	0,24	0,39	0,23	0,33	0,24	1,00	0,24	0,17
0,11	0,21	0,44	0,17	0,13	0,18	0,34	0,24	1,00	0,00
-0,07	0,09	-0,08	0,18	0,39	0,00	-0,02	0,17	0,00	1,00

  - √ Há correlação potencial entre scores sucessivos de atletas que concluíram a prova em mais de uma Olimpíada
    - Efetuada análise usando 139 escores representativo de cada atleta
    - Escolheu-se aleatoriamente um dos escores dos atletas que participaram de mais de uma Olimpíada

√ Solução por Componentes Principais

```
Factor Analysis: M1

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable  Factor1  Factor2  Factor3  Factor4  Communality
Var 1       0,691   -0,217    0,520   -0,206        0,837
Var 2       0,789   -0,184    0,193    0,092        0,701
Var 3       0,702    0,535   -0,047   -0,175        0,811
Var 4       0,674   -0,134   -0,139    0,396        0,648
Var 5       0,620   -0,551    0,084   -0,419        0,870
Var 6       0,687   -0,042    0,161    0,345        0,618
Var 7       0,621    0,521   -0,109   -0,234        0,724
Var 8       0,538   -0,087   -0,411    0,440        0,660
Var 9       0,434    0,439   -0,372   -0,235        0,574
Var 10      0,147   -0,596   -0,658   -0,279        0,888

Variance   3,7866   1,5173   1,1144   0,9134       7,3317
% Var       0,379    0,152    0,111    0,091        0,733
```

√ Solução por Máxima Verossimilhança

```
Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable  Factor1  Factor2  Factor3  Factor4  Communality
Var 1       0,493   -0,225    0,700    0,179        0,816
Var 2       0,464   -0,381    0,455   -0,240        0,625
Var 3       0,876   -0,334   -0,235    0,040        0,936
Var 4       0,348   -0,407    0,204   -0,437        0,519
Var 5       0,144   -0,563    0,551    0,166        0,669
Var 6       0,418   -0,247    0,307   -0,345        0,449
Var 7       0,666   -0,301   -0,182    0,041        0,569
Var 8       0,211   -0,322    0,127   -0,360        0,294
Var 9       0,392   -0,194   -0,138   -0,058        0,214
Var 10     -0,440   -0,864   -0,070    0,016        0,946

Variance   2,3788   1,8296   1,2648   0,5643       6,0374
% Var       0,238    0,183    0,126    0,056        0,604
```


	Componentes Principais						Máxima Verossimilhança					
Variável	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	ℓ_{i4}	h_i^2	Ψ_i	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	ℓ_{i4}	h_i^2	Ψ_i
100 m rasos	0,691	-0,217	0,520	-0,206	0,837	0,163	0,493	-0,225	0,700	0,179	0,816	0,184
Salto em distância	0,789	-0,184	0,193	0,092	0,701	0,299	0,464	-0,381	0,455	-0,240	0,625	0,375
Arremesso de peso	0,702	0,535	-0,047	-0,175	0,811	0,189	0,876	-0,334	-0,235	0,040	0,936	0,064
Salto em altura	0,674	-0,134	-0,139	0,396	0,648	0,352	0,348	-0,407	0,204	-0,437	0,519	0,481
400 m rasos	0,620	-0,551	0,084	-0,419	0,870	0,130	0,144	-0,563	0,551	0,166	0,669	0,331
100 m barreiras[	0,687	-0,042	0,161	0,345	0,618	0,382	0,418	-0,247	0,307	-0,345	0,449	0,551
Lançamento disco	0,621	0,521	-0,109	-0,234	0,724	0,276	0,666	-0,301	-0,182	0,041	0,569	0,431
Salto com vara	0,538	-0,087	-0,411	0,440	0,660	0,340	0,211	-0,322	0,127	-0,360	0,294	0,706
Lançamento dardo	0,434	0,439	-0,372	-0,235	0,574	0,426	0,392	-0,194	-0,138	-0,058	0,214	0,786
1500 m	0,147	-0,596	-0,658	-0,279	0,888	0,112	-0,440	-0,864	-0,070	0,016	0,946	0,054
Variância	3,787	1,517	1,114	0,913	7,332		2,379	1,830	1,265	0,564	6,037	
% Variância Total	37,9%	15,2%	11,1%	9,1%	73,3%		23,8%	18,3%	12,6%	5,6%	60,4%	

- As soluções dos dois métodos são bem diferentes

√ Solução por Componentes Principais


```
Factor Analysis: M1

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable  Factor1  Factor2  Factor3  Factor4  Communality
Var 1       0,691   -0,217    0,520   -0,206        0,837
Var 2       0,789   -0,184    0,193    0,092        0,701
Var 3       0,702    0,535   -0,047   -0,175        0,811
Var 4       0,674   -0,134   -0,139    0,396        0,648
Var 5       0,620   -0,551    0,084   -0,419        0,870
Var 6       0,687   -0,042    0,161    0,345        0,618
Var 7       0,621    0,521   -0,109   -0,234        0,724
Var 8       0,538   -0,087   -0,411    0,440        0,660
Var 9       0,434    0,439   -0,372   -0,235        0,574
Var 10      0,147   -0,596   -0,658   -0,279        0,888
```


- F_1: Todos os loadings positivos e grandes (exceto X_{10})
  - Habilidade atlética geral
- F_2: Contraste entre habilidade de corrida e de arremesso
- F_3: Contraste resistência (1500 m) com velocidade (100 m)
  - Embora haja loading relativamente alto para salto com vara
- F_4: É um mistério neste ponto

√ Solução por Máxima Verossimilhança


```
Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable  Factor1  Factor2  Factor3  Factor4  Communality
Var 1       0,493   -0,225    0,700    0,179        0,816
Var 2       0,464   -0,381    0,455   -0,240        0,625
Var 3       0,876   -0,334   -0,235    0,040        0,936
Var 4       0,348   -0,407    0,204   -0,437        0,519
Var 5       0,144   -0,563    0,551    0,166        0,669
Var 6       0,418   -0,247    0,307   -0,345        0,449
Var 7       0,666   -0,301   -0,182    0,041        0,569
Var 8       0,211   -0,322    0,127   -0,360        0,294
Var 9       0,392   -0,194   -0,138   -0,058        0,214
Var 10     -0,440   -0,864   -0,070    0,016        0,946
```


- F_1: *Loadings* de arremesso de disco e de peso são altos
  - Fator de força
- F_2: Corrida 1500 m única variável com *loading* alto
  - Fator resistência
- F_3: Loadings de corrida 100 e 400 m são altos
  - Fator velocidade
- F_4: Não é facilmente identificável
  - (pode ter algo com habilidade de salto e força nas pernas)

- Matriz de Resíduos: $R - \hat{L}\hat{L}' - \hat{\Psi}$
  - √ Componentes Principais

Componentes Principais									
0	-0,075	-0,030	-0,001	-0,047	-0,096	-0,027	0,114	0,051	-0,016
-0,075	0	-0,010	-0,056	-0,077	-0,092	-0,041	-0,042	0,042	0,017
-0,030	-0,010	0	0,042	-0,020	-0,032	-0,031	-0,034	-0,158	0,056
-0,001	-0,056	0,042	0	-0,024	-0,122	-0,001	-0,215	-0,022	0,020
-0,047	-0,077	-0,020	-0,024	0	0,022	-0,017	0,067	0,036	-0,091
-0,096	-0,092	-0,032	-0,122	0,022	0	0,014	-0,129	0,041	0,076
-0,027	-0,041	-0,031	-0,001	-0,017	0,014	0	0,009	-0,254	0,062
0,114	-0,042	-0,034	-0,215	0,067	-0,129	0,009	0	-0,005	-0,109
0,051	0,042	-0,158	-0,022	0,036	0,041	-0,254	-0,005	0	-0,112
-0,016	0,017	0,056	0,020	-0,091	0,076	0,062	-0,109	-0,112	0

  - √ Máxima Verossimilhança

Máxima Verossimilhança									
0	0,001	0,000	0,013	0,017	-0,014	0,004	-0,001	-0,020	-0,001
0,001	0	0,002	-0,004	-0,002	0,009	-0,021	-0,005	0,003	0,000
0,000	0,002	0	0,005	-0,002	-0,004	0,001	-0,008	0,001	0,000
0,013	-0,004	0,005	0	-0,029	0,001	-0,029	0,002	-0,042	0,002
0,017	-0,002	-0,002	-0,029	0	0,029	-0,002	0,008	0,050	0,003
-0,014	0,009	-0,004	0,001	0,029	0	0,037	-0,001	-0,010	-0,002
0,004	-0,021	0,001	-0,029	-0,002	0,037	0	0,041	-0,003	0,001
-0,001	-0,005	-0,008	0,002	0,008	-0,001	0,041	0	0,092	-0,001
-0,020	0,003	0,001	-0,042	0,050	-0,010	-0,003	0,092	0	-0,004
-0,001	0,000	0,000	0,002	0,003	-0,002	0,001	-0,001	-0,004	0

Rotação dos Fatores

- A matriz de covariância Σ é reproduzida pelos loadings fatoriais obtidos por transformação ortogonal, da mesma maneira que os loadings iniciais.
  - √ Matriz de covariâncias estimada

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}\mathbf{T}'\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}^*\hat{\mathbf{L}}^{*'} + \hat{\mathbf{\Psi}}$$

  - √ TT’ = T’T = I
  - √ $\hat{L}^*$: matriz de loadings rotacionados
  - √ A matriz de resíduos permanece a mesma ($\hat{h}_i^2$ e $\hat{\Psi}_i$)

$$\mathbf{S}_n - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' - \hat{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{S}_n - \hat{\mathbf{L}}^*\hat{\mathbf{L}}^{*'} - \hat{\mathbf{\Psi}}$$

  - √ Do ponto de vista estatístico é irrelevante obter $\hat{L}$ ou $\hat{L}^*$

- Comentários:
  - √ Com a rotação, busca-se uma estrutura mais simples
    - loadings originais podem não ter fácil interpretação
  - √ Ideal: encontrar um padrão de loadings tais que cada variável carregue-se fortemente em um único fator (com loadings moderados nos outros fatores)
  - √ Nem sempre é possível obter esta estrutura mais simples

Exemplo 9.8 – *Examination Scores*

- √ Lawley & Maxwell (1971)
- √ Avaliações de 220 estudantes do sexo masculino
- √ p = 6
- √ Dados: *BD_multivariada.xls/examination*
- √ Matriz de correlações:

Gaélico	1	0,439	0,410	0,288	0,329	0,248
Inglês	0,439	1	0,351	0,354	0,320	0,329
História	0,410	0,351	1	0,164	0,190	0,181
Aritmética	0,288	0,354	0,164	1	0,595	0,470
Álgebra	0,329	0,320	0,190	0,595	1	0,464
Geometria	0,248	0,329	0,181	0,470	0,464	1

- Solução por Máxima Verossimilhança:

Factor Analysis: M1

Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Communality
Var 1	0,553	0,428	0,490
Var 2	0,568	0,288	0,406
Var 3	0,392	0,450	0,356
Var 4	0,740	-0,272	0,622
Var 5	0,724	-0,212	0,569
Var 6	0,595	-0,132	0,372
Variance	2,2095	0,6056	2,8151
% Var	0,368	0,101	0,469

√ F_1: reflete a resposta global dos estudantes à instrução

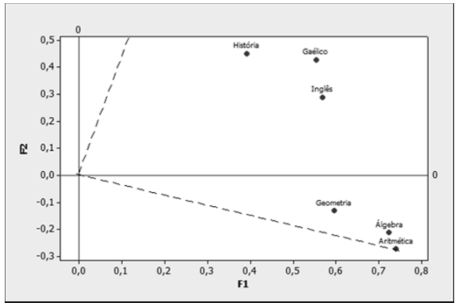
fator de inteligência geral

√ F_2: não é facilmente identificável

– Fator "Math – nonmath"

– metade positiva, metade negativa (fator bipolar)

- Plot dos loadings fatoriais:



√ Todos os pontos caem no primeiro quadrante

√ Revelam-se mais claramente 2 clusters das variáveis

- Rotação horária de 20º: $T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9397 & 0,3420 \\ -0,3420 & 0,9397 \end{bmatrix}$
- Rotação dos loadings:

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Communality
Var 1	0,373	0,594	0,490
Var 2	0,435	0,467	0,406
Var 3	0,214	0,558	0,356
Var 4	0,789	0,001	0,622
Var 5	0,752	0,054	0,569
Var 6	0,604	0,083	0,372
Variance	1,9295	0,8856	2,8151
% Var	0,322	0,148	0,469

√ F_1*: variáveis matemáticas do teste com loading alto

– (desprezíveis em $F*_2$)

– Fator de habilidade matemática

√ F_2*: variáveis de habilidade verbal com loadings altos

– Fator de habilidade verbal

- Comentários:

√ O fator de inteligência geral está submergido dos fatores F_1* e F_2*.

√ As comunalidades não se modificam

(fatores com e sem rotação)

Critérios de Rotação

- Ideal:
  - √ Transformação que fizesse os loadings de cada $\mathbf{Z}_i$ ter valor grande em apenas um dos fatores e valores pequenos (ou moderados) nos outros
    - Para facilitar a interpretação dos fatores
- Alguns critérios para encontrar matriz ortogonal:
  - √ Varimax
  - √ Quartimax
  - √ Orthomax

- Qualidade de ajuste
  - √ A rotação não acrescenta nenhuma melhoria em relação ao ajuste original
    - Matriz residual original não é alterada pela transformação ortogonal
    - Valores estimados de comunalidade e variâncias específicas permanecem inalterados
- Interpretação:
  - √ Novos fatores podem ser de mais fácil interpretação
- Quando a solução sem rotação já é de boa qualidade, não se recomenda rotação
  - √ Solução rotacionada pode ser pior

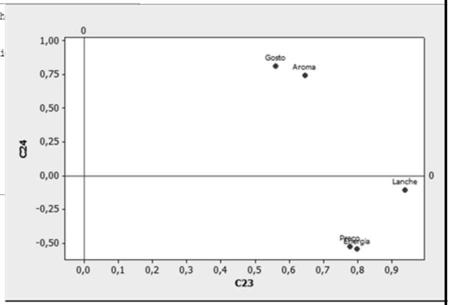
- Critério Varimax:
  - √ É um dos mais utilizados
  - √ Em geral, produz soluções mais simples
- Critério Quartimax
  - √ Tem tendência de gerar fatores, onde todas as variáveis têm loadings elevados
- Critério Orthomax
  - √ É uma média ponderada dos dois outros métodos

Exemplo 9.9 – Preferência Consumidor

- (continuação exemplo 9.3)
  - √ X_1: Gosto
  - √ X_2: Preço
  - √ X_3: Aroma
  - √ X_4: Adequado para lanche
  - √ X_5: fornece muita energia
  - √ Dados: *BD_multivariada.xls/preferencia_consumidor*

- Solução por Componentes Principais:

```
Principal Component Factor Analysis of th

Unrotated Factor Loadings and Communaliti

Variable  Factor1  Factor2  Communality
Var 1       0,560    0,816        0,979
Var 2       0,777   -0,524        0,879
Var 3       0,645    0,748        0,976
Var 4       0,939   -0,105        0,893
Var 5       0,798   -0,543        0,932

Variance   2,8531   1,8063       4,6594
% Var       0,571    0,361        0,932
```



- Rotação Varimax:

```
Rotated Factor Loadings and Communalities
Varimax Rotation

Variable  Factor1  Factor2  Communality
Var 1       0,020    0,989        0,979
Var 2       0,937   -0,011        0,879
Var 3       0,129    0,979        0,976
Var 4       0,842    0,428        0,893
Var 5       0,965   -0,016        0,932

Variance   2,5374   2,1220       4,6594
% Var       0,507    0,424        0,932
```

√ F_1*: Fator nutricional

Variável 4 está mais alinhada com F_1*

√ F_2*: Fator sabor

- Comparação

	Loadings Estimados				
	Originais		Rotação		
Variável	l_{i1}	l_{i2}	l_{i1}	l_{i2}	h_i^2
Gosto	0,560	0,816	0,020	0,989481	0,979
Preço	0,777	-0,524	0,937	-0,01123	0,879
Aroma	0,645	0,748	0,129	0,979467	0,976
Adequado lanche	0,939	-0,105	0,842	0,428052	0,893
Energético	0,798	-0,543	0,965	-0,01563	0,932
Variância	2,853	1,806	2,537	2,122	4,6594
% variabilidade	57,1%	36,1%	50,7%	42,4%	93,2%

Exemplo 9.10 – Ações *New York* Rotação

Continuação Exemplo 9.4

- Taxas de retorno de 5 ações negociadas na Bolsa de New York
  - √ Período: jan/75 a Dez/76
    - – Observadas 100 semanas
  - √ Ações:
    - – Allied Chemical
    - – du Pont
    - – Union Carbide
    - – Exxon
    - – Texaco

√ Solução por Máxima Verossimilhança

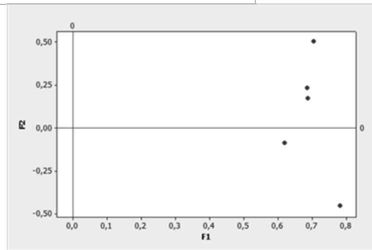
Factor Analysis: allied_chemical; du_pont; union_carbide; exxon; texaco

Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Communality
allied_chemical	0,687	-0,176	0,503
du_pont	0,704	-0,506	0,751
union_carbide	0,685	-0,234	0,525
exxon	0,620	0,086	0,392
texaco	0,782	0,452	0,816
Variance	2,4338	0,5538	2,9876
% Var	0,487	0,111	0,598

√ Plot dos *loadings*:



- Rotação Varimax:

Rotated Factor Loadings and Communalities
Varimax Rotation

Variable	Factor1	Factor2	Communality
allied_chemical	0,600	0,379	0,503
du_pont	0,851	0,164	0,751
union_carbide	0,641	0,338	0,525
exxon	0,363	0,510	0,392
texaco	0,208	0,879	0,816

- Matriz de Resíduos:

m=2				
0	-0,004	0,004	0,024	-0,004
-0,004	0	0,003	0,004	0,000
0,004	0,003	0	-0,031	0,005
0,024	0,004	-0,031	0	0,000
-0,004	0,000	0,005	0,000	0

Loadings Estimados					
	Originais		Rotação		
Variável	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	h_i^2
Allied Chemical	0,687	-0,176	0,600	0,379	0,503
Du Pont	0,704	-0,506	0,851	0,164	0,751
Union Carbide	0,685	-0,234	0,641	0,338	0,525
Exxon	0,620	0,086	0,363	0,510	0,392
Texaco	0,782	0,452	0,208	0,879	0,816
Variância	2,434	0,554	1,670	1,318	2,988
% variabilidade	48,7%	11,1%	33,4%	26,4%	59,8%

√ F_1*: Indústrias químicas carregam fortemente

– Representam condições econômicas que afetam essas ações

√ F_2*: Ações de óleo & gás carregam fortemente

– Representam condições econômicas que afetam essas ações

√ Rotação tende a destruir um fator geral

Exemplo 9.11 – Decatlo Olímpico

- Continuação exemplo 9.6
  - √ 160 observações multivariadas (139 atletas)
  - √ Período: 1948 a 1976
  - √ Escores padronizados para cada um dos 10 eventos
  - √ Análise Fatorial de R por componentes principais e por máxima verossimilhança
  - √ Dados: *BD_multivariada.xls/decatlo*

√ A distribuição dos scores padronizados são normais ou aproximadamente normais para cada um dos 10 eventos (Linden, 1977)

√ Variáveis:

- X_1: 100 m rasos
- X_2: Salto em distância
- X_3: Arremesso de peso
- X_4: Salto em altura
- X_5: 400 m rasos
- X_6: 100 m com barreiras
- X_7: Lançamento de disco
- X_8: Salto com vara
- X_9: Lançamento de dardo
- X_{10}: 1.500 m

√ Solução por Componentes Principais

Factor Analysis: M1

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Communality
Var 1	0,691	-0,217	0,520	-0,206	0,837
Var 2	0,789	-0,184	0,193	0,092	0,701
Var 3	0,702	0,535	-0,047	-0,175	0,811
Var 4	0,674	-0,134	-0,139	0,396	0,648
Var 5	0,620	-0,551	0,084	-0,419	0,870
Var 6	0,687	-0,042	0,161	0,345	0,618
Var 7	0,621	0,521	-0,109	-0,234	0,724
Var 8	0,538	-0,087	-0,411	0,440	0,660
Var 9	0,434	0,439	-0,372	-0,235	0,574
Var 10	0,147	-0,596	-0,658	-0,279	0,888
Variance	3,7866	1,5173	1,1144	0,9134	7,3317
% Var	0,379	0,152	0,111	0,091	0,733

√ Solução por Máxima Verossimilhança

Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Communality
Var 1	0,493	-0,225	0,700	0,179	0,816
Var 2	0,464	-0,381	0,455	-0,240	0,625
Var 3	0,876	-0,334	-0,235	0,040	0,936
Var 4	0,348	-0,407	0,204	-0,437	0,519
Var 5	0,144	-0,563	0,551	0,166	0,669
Var 6	0,418	-0,247	0,307	-0,345	0,449
Var 7	0,666	-0,301	-0,182	0,041	0,569
Var 8	0,211	-0,322	0,127	-0,360	0,294
Var 9	0,392	-0,194	-0,138	-0,058	0,214
Var 10	-0,440	-0,864	-0,070	0,016	0,946
Variance	2,3788	1,8296	1,2648	0,5643	6,03[illegible]
% Var	0,238	0,183	0,126	0,056	0,604

√ Rotação Componentes Principais

Rotated Factor Loadings and Communalities
Varimax Rotation

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Communality
Var 1	0,884	0,136	0,156	0,113	0,837
Var 2	0,631	0,194	0,515	0,006	0,701
Var 3	0,245	0,825	0,223	0,148	0,811
Var 4	0,239	0,151	0,750	-0,077	0,648
Var 5	0,797	0,075	0,102	-0,468	0,870
Var 6	0,404	0,153	0,635	0,170	0,618
Var 7	0,186	0,814	0,147	0,079	0,724
Var 8	-0,036	0,176	0,762	-0,217	0,660
Var 9	-0,048	0,735	0,110	-0,141	0,574
Var 10	0,045	-0,041	0,112	-0,934	0,888
Variance	2,1345	2,0230	1,9407	1,2335	7,3317
% Var	0,213	0,202	0,194	0,123	0,733

√ Rotação Máxima Verossimilhança

Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Communality
Var 1	0,493	-0,225	0,700	0,179	0,816
Var 2	0,464	-0,381	0,455	-0,240	0,625
Var 3	0,876	-0,334	-0,235	0,040	0,936
Var 4	0,348	-0,407	0,204	-0,437	0,519
Var 5	0,144	-0,563	0,551	0,166	0,669
Var 6	0,418	-0,247	0,307	-0,345	0,449
Var 7	0,666	-0,301	-0,182	0,041	0,569
Var 8	0,211	-0,322	0,127	-0,360	0,294
Var 9	0,392	-0,194	-0,138	-0,058	0,214
Var 10	-0,440	-0,864	-0,070	0,016	0,946
Variance	2,3788	1,8296	1,2648	0,5643	6,03[illegible]
% Var	0,238	0,183	0,126	0,056	0,604

Loadings Estimados

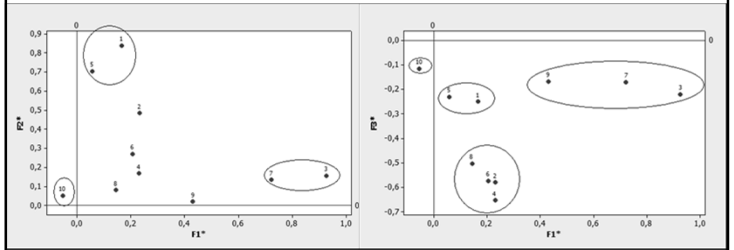
Variável	Componentes Principais					Máxima Verossimilhança				
	l_{i1}	l_{i2}	l_{i3}	l_{i4}	h_i^2	l_{i1}	l_{i2}	l_{i3}	l_{i4}	h_i^2
100 m rasos	0,884	0,136	0,156	0,113	0,837	0,166	0,841	-0,25022	0,137	0,816
Salto em distância	0,631	0,194	0,515	0,006	0,701	0,232	0,484	0,57987	-0,011	0,625
Arremesso de peso	0,245	0,825	0,223	0,148	0,811	0,927	0,157	-0,2192	0,066	0,936
Salto em altura	0,239	0,151	0,750	-0,077	0,648	0,230	0,168	0,65275	-0,111	0,519
400 m rasos	0,797	0,075	0,102	-0,468	0,870	0,058	0,705	-0,22999	-0,340	0,669
100 m com barreiras	0,404	0,153	0,635	0,170	0,618	0,206	0,270	0,57339	0,069	0,449
Lançamento de disco	0,186	0,814	0,147	0,079	0,724	0,723	0,133	-0,17026	0,009	0,569
Salto com vara	-0,036	0,176	0,762	-0,217	0,660	0,144	0,081	0,50208	-0,121	0,294
Lançamento de dardo	-0,048	0,735	0,110	-0,141	0,574	0,431	0,021	-0,16697	-0,007	0,214
1.500 m	0,045	-0,041	0,112	-0,934	0,888	-0,054	0,052	-0,11492	-0,963	0,946
Variância	2,134	2,023	1,941	1,233	7,332	1,771	1,592	1,577	1,097	6,037
% variabilidade	21,3%	20,2%	19,4%	12,3%	73,3%	17,7%	15,9%	15,8%	11,0%	60,4%

√ Ambos os métodos

- Loadings apontam para mesmo atributos subjacentes
- Fatores 1 e 2 não estão na mesma ordem

- Solução de máxima verossimilhança -Interpretação:
  - √ F1*: Arremesso de peso, lançamento de disco e lançamento de dardo.
    - Linden (1977): *explosive arm strength*
  - √ F2*: 100 m rasos e 400 m rasos (salto em distância)
    - Linden (1977): *running speed*
  - √ F3*: Salto em altura, 110 m com barreiras, salto com vara e salto em distância
    - Linden (1977): *explosive leg strength*
  - √ F4*: 1.500 m e 400 m rasos
    - Linden (1977): *running endurance*

- Plot dos *loadings* de máxima verossimilhança com *rotação*:



  - √ Em geral, os pontos estão agrupados ao longo dos eixos

Estimação dos Escores dos Fatores

- Modelo fatorial:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \cdots + l_{1m}F_m + \epsilon_1 \\
Z_2 &= l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \cdots + l_{2m}F_m + \epsilon_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
Z_p &= l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \cdots + l_{pm}F_m + \epsilon_p
\end{aligned}
$$

  - √ Para cada elemento amostral *k*, seu escore no fator F_j é calculado como:

$$\hat{F}_{jk} = w_{j1}Z_{1k} + w_{j2}Z_{2k} + \cdots + w_{jp}Z_{pk}$$

    - w_{jk}: peso de ponderação de cada variável no Fator F_j

- Os escores podem ser utilizados para construir:
  - √ Gráficos
  - √ Mapas de percepção
  - √ Variável reposta ou explicativa em outros métodos
- Métodos de estimação dos scores:
  - √ Método de mínimos quadrados ponderados
  - √ Método de regressão
  - √ Método ad hoc

Exemplo 9.12 – Cálculo dos Scores Fatoriais

- Ações New York
  - √ Solução por Máxima Verossimilhança de R

Rotated Factor Loadings

0,599557	0,379038
0,851127	0,164465
0,640928	0,337589
0,363370	0,509725
0,207976	0,879263

Matrix \Psi

0,496861	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,248534	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,475245	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,608143	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,183642

√ Regressão: $\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{L}}^{*\prime}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$

√ Mínimos quadrados ponderados: $\hat{\mathbf{f}} = \left(\hat{\mathbf{L}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\hat{\mathbf{L}}^{*}\right)^{-1}\hat{\mathbf{L}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\mathbf{z}$

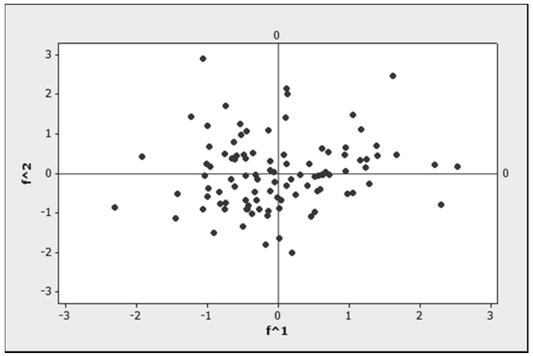
- Para o vetor de observações padronizadas:
  - √ **z’** = [0,5; -1,40; -0,20; -0,70; 1,40]
  - √ scores por regressão

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{L}}^{*\prime}\mathbf{Rz} = \begin{bmatrix} 0,1838 & 0,6626 & 0,2188 & 0,0479 & -0,2085 \\ 0,0402 & -0,1877 & 0,0164 & 0,1123 & 0,8553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,50 \\ -1,40 \\ -0,20 \\ -0,70 \\ 1,40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,205 \\ 1,398 \end{bmatrix}$$

√ Para cálculo da matriz de dados

$$\hat{\mathbf{f}}' = \mathbf{z}'\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{L}}^{*}$$

- Plot scores fatoriais:



Critérios para Determinação do Valor de *m*

- Teste de hipótese para auxiliar na decisão do número de fatores (*m*) que são suficientes para o modelo de análise fatorial
- Suposições do teste:
  - √ Os vetores aleatórios **Z** e **F** têm distribuição normal multivariada
  - √ Amostras de tamanho grande

- Teste
  - √ H_0: *m* fatores são suficientes *vs.*
    H_1: necessários mais que *m* fatores
  - √ Estatística de teste (Bartlett, 1954)

$$T = \left[n - 1 - \frac{2p + 4m + 5}{6}\right] \ln\left(\frac{|\hat{\mathrm{L}}_z \hat{\mathrm{L}}_z{}' + \mathbf{\Psi}_{\mathbf{z}}|}{|\mathrm{R}|}\right)$$

  - √ Sob H_0: $T \sim \chi^2_{gl}$, com $gl = ½\,[(p – m)^2 – p – m]$
  - √ Para o teste ser válido gl > 0
    - Se p = 5, m ≤ 2
    - Se p = 10, m ≤ 5
    - Se p = 20, m ≤ 14
  - √ Para *n* grande e *m* pequeno em relação a p, o teste tende a rejeitar H0 (indica aumento de *m*)

- Comentários:
  - √ Teste somente é válido para dados provenientes de distribuição normal p-variada
  - √ Para *n* grande e *m* pequeno em relação a *p*, o teste tende a rejeitar H_0 (indicando o aumento de *m*)
    - Baseando-se apenas na indicação do teste, a tendência será reter no sistema um número muito grande de fatores sem necessidade

Exemplo 9.7 – Teste para valor de *m*

- Ações Bolsa New York (*m* = 2)

$$\hat{\mathbf{L}}_z\hat{\mathbf{L}}_z{}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{matrix} 1,00000 & 0,57264 & 0,51223 & 0,41107 & 0,45797 \\ 0,57264 & 1,00000 & 0,60103 & 0,39311 & 0,32162 \\ 0,51223 & 0,60103 & 1,00000 & 0,40497 & 0,43013 \\ 0,41107 & 0,39311 & 0,40497 & 1,00000 & 0,52375 \\ 0,45797 & 0,32162 & 0,43013 & 0,52375 & 1,00000 \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} 1,00000 & 0,57692 & 0,50866 & 0,38672 & 0,46218 \\ 0,57692 & 1,00000 & 0,59838 & 0,38952 & 0,32195 \\ 0,50866 & 0,59838 & 1,00000 & 0,43610 & 0,42563 \\ 0,38672 & 0,38952 & 0,43610 & 1,00000 & 0,52353 \\ 0,46218 & 0,32195 & 0,42563 & 0,52353 & 1,00000 \end{matrix}$$

$|\hat{\mathbf{L}}_z\hat{\mathbf{L}}_z{}' + \hat{\mathbf{\Psi}}| = 0,194403$ e $|\mathrm{R}| = 0,193234$

$$T = \left[100 - 1 - \frac{2(5) + 4(2) + 5}{6}\right] \ln\left(\frac{0,194403}{0,193234}\right) = 0,574$$

  - √ Valor crítico: gl= ½[(5 – 2)² – 5 – m] = 1

    $\chi^2_1(0{,}05) = 3{,}84$ ➔ Não se rejeita H_0

    p-valor: $P\{\chi^2_1 > 0{,}574\} = 0{,}448674$
    - H_0 não deveria ser rejeitada em qualquer nível razoável

Critério de Akaike

Akaike (1974, 1987)

- Suposições:
  - √ Dados provenientes de normal multivariada
  - √ Envolve método de máxima verossimilhança
- Critério: escolhe-se o valor de *m* que minimize a função AIC

$$\mathrm{AIC} = [-\ln(\max\{L(\mu, \Sigma)\})]$$

  - √ Se dois métodos tem a mesma verossimilhança, o procedimento vai privilegiar o modelo com menor número de fatores

Critério Bayesiano de Schwarz

- Suposições:
  - √ Dados provenientes de normal multivariada
  - √ Envolve método de máxima verossimilhança
- Critério: escolhe-se o valor de *m* que minimize a função SBC

$$\mathrm{SBC} = [-\ln(\max\{L(\mu, \Sigma)\})] + \frac{m}{2}\ln(n)$$

  - √ Os critérios AIC e SBC devem ser usados com cautela
    - Em geral, indicam quantidade de fatores maior que a necessária
  - √ Em geral, o critério SBC resulta em melhores soluções que o método Akaike

Matriz de Resíduos

- A observação da matriz de resíduos:
  - √ Muitas vezes, pode indicar quando o número de fatores está superdimensionado
  - √ Ex.:
    - Se *m* não for muito pequeno e a matriz de resíduos estiver próxima de zero, recomenda-se testar outras soluções para *m* menores que o valor já especificado

- Importante:
  - √ Análise fatorial deve ser utilizada apenas se utilizada em situações em que as variáveis originais são correlacionadas
  - √ Consequência:
    - Evitar soluções com *m* elevado tal que determinados fatores fiquem relacionados com uma única variável original
  - √ Em situações em que aparecem fatores relacionados a uma única variável Z_i é recomendável retirar a variável Z_i e reestimar o modelo de análise fatorial

Validação do Modelo

- Análise Fatorial está fundamentada em suposições que não podem ser verificadas a priori:
  - √ Linearidade e independência dos fatores
  - √ Interpretação centrada na informação contida na matriz $\hat{L}$ (estimada a partir da escolha prévia de *m*)
- É importante avaliar até que ponto a matriz $\hat{L}$ está representando corretamente a relação existente entre as variáveis originais e os fatores do modelo

Estratégia para Análise Fatorial

Johnson & Wichern (2002)

- Decisões em qualquer Análise Fatorial
  - √ Escolha de *m*, o número de fatores comuns
    - Há muitos testes de adequação assintóticos que são apropriados apenas os dados que são aproximadamente normais
    - Os teste provavelmente rejeitarão o modelo para *m* pequeno se o número de variáveis e de observações for alto
    - Em geral a escolha é baseada em alguma combinação de:
      - proporção de variância amostral explicada
      - conhecimento do assunto
      - razoabilidade dos resultados

√ Escolha do método de solução e do tipo de rotação

- São decisões menos cruciais
- A maioria de análises fatoriais satisfatórias são aquelas em que:
  - são tentados mais de um método de rotação
  - os resultados confirmam substancialmente a mesma estrutura

Roteiro

1. Execute uma Análise Fatorial por componentes principais
   - √ Este método é particularmente apropriado para uma primeira passagem pelos dados
   - √ Procure observações suspeitas plotando os escores fatoriais
     - Calcule os escores padronizados e as distâncias quadráticas para cada observação
   - √ Tente rotação Varimax

2. Execute Análise Fatorial de Máxima Verossimilhança,
   - √ (incluir uma rotação Varimax)
3. Compare as soluções obtidas pelas duas análises fatoriais
   - √ Os loadings se agrupam da mesma maneira?
   - √ Plote os escores fatoriais obtidos por componentes principais vs. os obtido pela solução de máxima verossimilhança
4. Repita passos anteriores para outros valores de *m*
   - √ Os fatores extras contribuem necessariamente para a compreensão e interpretação dos dados?

5. Para grandes conjuntos de dados, divida-os pela metade e excute uma Análise Fatorial em cada parte
   - √ Compare os dois resultados, com aquele obtido do conjunto de dados completo
   - √ Verifique a estabilidade da solução
   - √ A divisão pode ser aleatória ou determinística

Exemplo 9.14

- Medidas de ossos e crânios de frangos White Leghorn
  - √ Dados originais: Dunn (1928)
  - √ Análise fatorial elaborada por Wright (1954)
  - √ Variáveis:

Crânio	Pernas	Asas
√ X_1: comprimento	√ X_3: fêmur (comp.)	√ X_5: úmero (comp.)
√ X_2: amplitude	√ X_4: tíbia (comp.)	√ X_6: cúbito (comp.)

  - √ Dados: *BD_multivariada.xls/frangos*

- Matriz de Correlações amostral:

R (conjunto completo)

1,000	0,505	0,569	0,602	0,621	0,603
0,505	1,000	0,422	0,467	0,482	0,450
0,569	0,422	1,000	0,926	0,877	0,878
0,602	0,467	0,926	1,000	0,874	0,894
0,621	0,482	0,877	0,874	1,000	0,937
0,603	0,450	0,878	0,894	0,937	1,000

R_1 (n_1 = 137)

1,000	0,696	0,588	0,639	0,694	0,660
0,696	1,000	0,540	0,575	0,606	0,584
0,588	0,540	1,000	0,901	0,844	0,866
0,639	0,575	0,901	1,000	0,835	0,863
0,694	0,606	0,844	0,835	1,000	0,931
0,660	0,584	0,866	0,863	0,931	1,000

R_2 (n_2 = 139)

1,000	0,366	0,572	0,587	0,587	0,598
0,366	1,000	0,352	0,406	0,420	0,386
0,572	0,352	1,000	0,950	0,909	0,894
0,587	0,406	0,950	1,000	0,911	0,927
0,587	0,420	0,909	0,911	1,000	0,940
0,598	0,386	0,894	0,927	0,940	1,000

- Solução por Componentes Principais

Principal Component Factor Analysis of the Correlation Matrix

Unrotated Factor Loadings and Communalities

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Communality
Var 1	0,741	0,350	0,573	0,999
Var 2	0,604	0,721	-0,340	1,000
Var 3	0,929	-0,233	-0,075	0,923
Var 4	0,943	-0,174	-0,067	0,925
Var 5	0,948	-0,143	-0,045	0,920
Var 6	0,945	-0,189	-0,047	0,930
Variance	4,4564	0,7824	0,4584	5,6973
% Var	0,743	0,130	0,076	0,950

Rotated Factor Loadings and Communalities
Varimax Rotation

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Communality
Var 1	0,355	0,902	0,243	0,999
Var 2	0,235	0,211	0,949	1,000
Var 3	0,921	0,218	0,165	0,923
Var 4	0,904	0,251	0,212	0,925
Var 5	0,888	0,284	0,228	0,920
Var 6	0,908	0,264	0,191	0,930
Variance	3,4578	1,1198	1,1197	5,6973
% Var	0,576	0,187	0,187	0,950

- Solução por Componentes Principais

	Componentes Principais							
	Loadings Estimados			Loadings Estimados (Rotação)				
Variável	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	h_i^2	Ψ_i
Comprimento	0,741	0,350	0,573	0,355	0,902	0,243	0,999	0,001
Amplitide	0,604	0,721	-0,340	0,235	0,211	0,949	1,000	0,000
Fêmur	0,929	-0,233	-0,075	0,921	0,218	0,165	0,923	0,077
Tíbia	0,943	-0,174	-0,067	0,904	0,251	0,212	0,925	0,075
Úmero	0,948	-0,143	-0,045	0,888	0,284	0,228	0,920	0,080
Cúbito	0,945	-0,189	-0,047	0,908	0,264	0,191	0,930	0,070
Variância	4,456	0,782	0,458	3,458	1,120	1,120	5,697	
% variabilidade	74,3%	13,0%	7,6%	57,6%	18,7%	18,7%	95,0%	

- Matriz de Resíduos

```
Matrix M8

-0,0000000   0,0002522   0,0055712   0,0028457  -0,0051820  -0,0036794
 0,0002522  -0,0000000   0,0031813  -0,0000630  -0,0027691  -0,0006024
 0,0055712   0,0031813  -0,0000000   0,0041433  -0,0397322  -0,0468809
 0,0028457  -0,0000630   0,0041433  -0,0000000  -0,0478565  -0,0332595
-0,0051820  -0,0027691  -0,0397322  -0,0478565  -0,0000000   0,0127770
-0,0036794  -0,0006024  -0,0468809  -0,0332595   0,0127770  -0,0000000
```


- Solução por Máxima Verossimilhança

```
Factor Analysis: M1

Maximum Likelihood Factor Analysis of the Correlation Matrix

* NOTE * Heywood case


Rotated Factor Loadings and Communalities
Varimax Rotation

Variable  Factor1  Factor2  Factor3  Communality
Var 1       0,468   -0,491    0,154        0,484
Var 2       0,209   -0,808    0,066        0,701
Var 3       0,887   -0,281    0,126        0,881
Var 4       0,941   -0,336   -0,026        1,000
Var 5       0,816   -0,349    0,444        0,985
Var 6       0,846   -0,314    0,310        0,910

Variance   3,3169   1,3061   0,3375       4,9605
%
```

√ Heywood Case: variância específica da tíbia = 0

- Replicar o resultado, usando a opção Heywood (SAS ou similar)

- Solução por Máxima Verossimilhança

	Máxima Verossimilhança							
	Loadings Estimados			Loadings Estimados (Rotação)				
Variável	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	h_i^2	Ψ_i
Comprimento	0,602	0,279	0,209	0,468	0,491	0,154	0,484	0,516
Amplitide	0,467	0,674	0,172	0,209	0,808	0,066	0,701	0,299
Fêmur	0,926	-0,054	0,143	0,887	0,281	0,126	0,881	0,119
Tíbia	1,000	0,000	0,000	0,941	0,336	-0,026	1,000	0,000
Úmero	0,874	-0,010	0,470	0,816	0,349	0,444	0,985	0,015
Cúbito	0,894	-0,034	0,331	0,846	0,314	0,310	0,910	0,090
Variância	4,001	0,536	0,424	3,317	1,306	0,338	4,961	
% variabilidade	66,7%	8,9%	7,1%	55,3%	21,8%	5,6%	82,7%	

- Matriz de Resíduos

```
Matrix M9

 0,0000000   0,0000290  -0,0033400  -0,0000000  -0,0005029   0,0052478
 0,0000290   0,0000000   0,0013411  -0,0000000   0,0000741  -0,0010782
-0,0033400   0,0013411   0,0000000  -0,0000000  -0,0001735   0,0008743
-0,0000000  -0,0000000  -0,0000000   0,0000000  -0,0000000  -0,0000000
-0,0005029   0,0000741  -0,0001735  -0,0000000   0,0000000  -0,0001086
 0,0052478  -0,0010782   0,0008743  -0,0000000  -0,0001086   0,0000000
```


- Comentários:

√ Após a rotação, os dois métodos de solução parecem fornecer resultados diferentes

√ Componentes principais:

- F_1: Todos os fatores, exceto X_1 e X_2.
- F_2 e F_3: cada um com uma única variável
- Solução por três fatores comuns parece estar garantida (F_3 explica uma quantidade significativa da variância)

√ Máxima Verossimilhança:

- F_1: Todos os fatores exceto X_1 e X_2
- F_2: Dimensão cabeça (X_1 e X_2)
- F_3: não é claro (provavelmente não é necessário)
- Matriz de resíduos com elementos bastante pequenos (retenção de 3 ou menos fatores)

- Plot dos escores de F_1 e F_2
  - √ Escores por Mínimos Quadrados Ponderados de estimavas de máxima verossimilhança com rotação

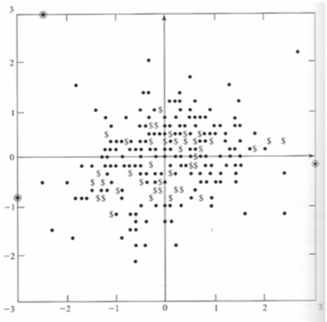


Figure 9.5 Factor scores for the first two factors of chicken-bone data.

  - – Gráficos deste tipo permitem identificar observações que não são consistentes com o restante das observações

- Plot dos escores fatoriais obtidos por componentes principais e por máxima verossimilhança
  - √ Se os loadings de um particular fator concordam entre si, os pares de escores deveriam se agrupar próximos à identidade
  - √ Conjuntos de loadings que não concordam produzirão escores fatoriais que se desviam deste padrão
    - – Usualmente, associado com o último fator, podendo sugerir que o número de fatores é muito grande

      (últimos fatores não significativos)

√ F_1 – Componentes Principais vs. Máxima Verossimilhança

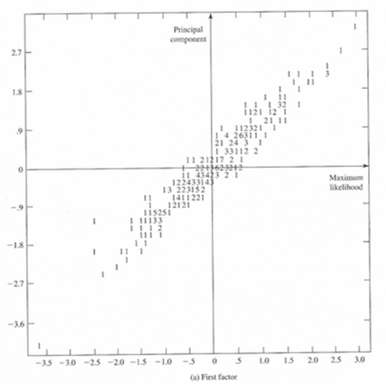


Figure 9.6 Pairs of factor scores for the chicken-bone data. (Loadings are estimated by principal component and maximum likelihood methods.)

√ F_2 – Componentes Principais vs. Máxima Verossimilhança

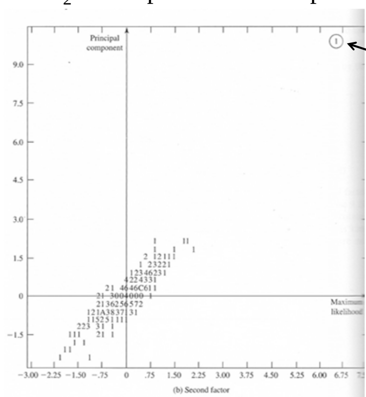
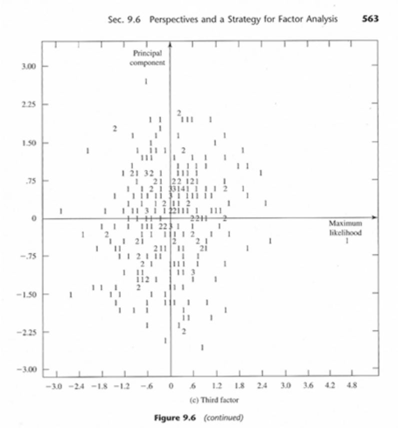


Figure 9.6 *(continued)*

A remoção do ponto [39,1; 39,3; 75,7; 115; 73,4; 69,1] não altera substancialmente os loadings

√ Uma das observações não é consistente com as demais
- – Score incomumente alto

√ F_3 – Componentes Principais vs. Máxima Verossimilhança



√ Aparentemente, o 3º fator não é necessário

- Divisão do conjunto de dados em duas partes iguais (o conjunto de dados é grande)
  - √ Matrizes de correlação

√ Estimativas dos loadings por Componentes Principais com rotação (m=3)

	Componentes Principais - Loadings c/ Rotação									
	1º Conjunto (n_1 = 137 obs.)					2º Conjunto (n_1 = 139 obs.)				
Variável	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	h_i^2	Ψ_i	ℓ_{i1}	ℓ_{i2}	ℓ_{i3}	h_i^2	Ψ_i
Comprimento	0,360	0,361	0,853	0,988	0,012	0,352	0,921	0,167	1,000	0,000
Amplitide	0,303	0,899	0,312	0,997	0,003	0,203	0,145	0,968	0,999	0,001
Fêmur	0,914	0,238	0,175	0,923	0,077	0,930	0,239	0,130	0,939	0,061
Tíbia	0,877	0,270	0,242	0,901	0,099	0,925	0,248	0,187	0,952	0,048
Úmero	0,830	0,247	0,395	0,906	0,094	0,912	0,252	0,208	0,939	0,061
Cúbito	0,871	0,231	0,332	0,922	0,078	0,914	0,272	0,168	0,938	0,062
Variância	3,273	1,182	1,180	5,636		3,553	1,125	1,088	5,766	
% variabilidade	54,6%	19,7%	19,7%	93,9%		59,2%	18,8%	18,1%	96,1%	

– Os resultados das duas metades são bastante similares

- Conclusões
  - √ Fatores F_2* e F_3* trocam de posição, mas coletivamente representam as dimensões da cabeça
  - √ Fator F_1* aparenta ser dimensões do corpo (pernas e asas)
  - √ A solução é estável
    - – É a mesma interpretação dada pelo conjunto completo
  - √ Parece que modelo com um ou dois fatores é suficiente para ajustar os dados

Outras Medidas de Ajuste do Modelo

√ Critério de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO)

√ Teste de Esfericidade de Bartlett para R

Critério de Kaiser–Meyer–Olkin

√ Rencher (2002) sugere que para um modelo de Análise Fatorial possa ser ajustado adequadamente aos dados é necessário que R^{-1} seja próxima da matriz diagonal

– O coeficiente KMO baseia-se nesse princípio

$$\text{KMO} = \frac{\sum_{i \neq j} R_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} R_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} Q_{ij}^2}$$

√ $R_{ij} = \text{Corr}(X_i, X_j)$

√ Q_{ij} = Correlação parcial entre 2 variáveis quando todas as outras variáveis são consideradas constantes

√ $Q_{ij} \approx$ zero ➔ KMO ≈ 1 ➔ $R^{-1} \approx$ diagonal

- Adequabilidade do ajuste de um modelo de Análise Fatorial (Rice, 1977)

√ modelo adequado: KMO $\geq$ 0,8

√ modelo excelente: KMO $\geq$ 0,9

√ modelo péssimo: KMO $\leq$ 0,5

Teste de Bartlett

- Teste de Esfericidade da matriz de correlação

√ Suposições:

– variáveis provenientes de distribuição normal multivariada

– modelo de Análise Fatorial pressupõe que as variáveis respostas são correlacionadas entre si

√ Teste de hipótese para verificar se a matriz de correlação populacional é próxima ou não da identidade

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{I}$ *vs.* H_1: $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{I}$
- Estatística de teste:

$$\mathrm{T} = -\left[n - \frac{1}{6}(2p+1)\right]\sum_{i=1}^{p} \ln \hat{\lambda}_i$$

  - √ $\hat{\lambda}_i$: autovalores da matriz de correlação amostral R
- Sob H_0: $T \sim \chi^2_{gl}$, com gl = ½ p(p – 1)
  - √ Para se ajustar o modelo de Análise Fatorial, o teste de Bartlett deve rejeitar H_0.

Comentários

- Análise fatorial permanece muito subjetiva
  - √ Exemplos em que o modelo oferece explicações razoáveis em termos de poucos fatores interpretáveis
  - √ Infelizmente o critério para julgar a qualidade de qualquer análise fatorial não têm sido bem quantificado
- A qualidade do ajuste parece depender do critério Huau (wow)
  - √ Huau, eu compreendi estes fatores

Exemplos

Exemplo

- Expectativa de vida
  - √ Referente à expectativa de vida (em anos) nos anos 60
    - – Médias por país, idade e sexo
  - √ Fonte: Keyfitz e Flieger (1971)
  - √ Apresentado em Everitt e Hothorn (2011)
  - √ Dados: `lifeex.txt`

- Variáveis:
  - √ Pais: país (fator com 31 níveis)
  - √ m0: expectativa média de vida dos homens ao nascer (anos)
  - √ m25: expectativa média de vida dos homens na juventude (anos)
  - √ m50: expectativa média de vida dos homens na maturidade (anos)
  - √ m75: expectativa média de vida dos homens na velhice (anos)
  - √ w0: expectativa média de vida das mulheres ao nascer (anos)
  - √ w25: expectativa média de vida das mulheres na juventude (anos)
  - √ w50: expectativa média de vida das mulheres na maturidade (anos)
  - √ w75: expectativa média de vida das mulheres na velhice (anos)

- Carregamento dos dados – Comandos em R:

```
> #  Carregamento de Dados
>
> expectativa <- read.table("lifeex.txt", header = T)# Carrega data frame
> colunas <- c("pais", "h0", "h25", "h50", "h75", "m0", "m25", "m50", "m75")
> colnames(expectativa) <- colunas
> head(expectativa)
        pais h0 h25 h50 h75 m0 m25 m50 m75
1    Algeria 63  51  30  13 67  54  34  15
2   Cameroon 34  29  13   5 38  32  17   6
3 Madagascar 38  30  17   7 38  34  20   7
4  Mauritius 59  42  20   6 64  46  25   8
5    Reunion 56  38  18   7 62  46  25  10
6 Seychelles 62  44  24   7 69  50  28  14
> vida <- expectativa[,-1]
>
```


√ Teste formal para o número de fatores – Máxima Verossimilhança

```
> # Teste para o número de fatores - MV
>
> rownames(vida) <- expectativa[,1]
> sapply(1:3, function(f)
+ factanal(vida, factors = f, method = "mle")$PVAL)
  objective    objective    objective
1.879555e-24 1.911514e-05 4.578204e-01
```

√ Teste: H_0: quantidade de fatores é suficiente

√ A solução com 3 fatores pode ser suficiente

√ Cuidado:

- Há apenas 31 países e o uso de teste assintótico pode ser suspeito

√ Modelo fatorial com 3 fatores

```
> # Análise fatorial
>
> vida.af <- factanal(vida, factors = 3, method = "mle")
> vida.af

Call:
factanal(x = vida, factors = 3, method = "mle")

Uniquenesses:
   h0   h25   h50   h75    m0   m25   m50   m75
0.005 0.362 0.066 0.288 0.005 0.011 0.020 0.146

Loadings:
    Factor1 Factor2 Factor3
h0  0.964   0.122   0.226
h25 0.646   0.169   0.438
h50 0.430   0.354   0.790
h75         0.525   0.656
m0  0.970   0.217
m25 0.764   0.556   0.310
m50 0.536   0.729   0.401
m75 0.156   0.867   0.280

               Factor1 Factor2 Factor3
SS loadings      3.375   2.082   1.640
Proportion Var   0.422   0.260   0.205
Cumulative Var   0.422   0.682   0.887

Test of the hypothesis that 3 factors are sufficient.
The chi square statistic is 6.73 on 7 degrees of freedom.
The p-value is 0.458
```

- Default do comando `factanal` é rotação Varimax

√ Comunalidades

```
> # Comunalidades:
>
> 1 - vida.af$uniquenesses
       h0       h25       h50       h75        m0       m25       m50       m75
0.9950000 0.6383261 0.9337228 0.7122064 0.9950000 0.9889330 0.9798799 0.8540204
```

√ As variáveis h0, h50, m0, m25 e m50 compartilham muito de suas variâncias através dos fatores

√ As variáveis h25 e h75 são mais únicos

Análise Multivariada - 2016 151

√ Interpretação dos fatores

```
> # Loadings
>
> vida.af$loadings

Loadings:
    Factor1 Factor2 Factor3
h0  0.964   0.122   0.226
h25 0.646   0.169   0.438
h50 0.430   0.354   0.790
h75         0.525   0.656
m0  0.970   0.217
m25 0.764   0.556   0.310
m50 0.536   0.729   0.401
m75 0.156   0.867   0.280

               Factor1 Factor2 Factor3
SS loadings      3.375   2.082   1.640
Proportion Var   0.422   0.260   0.205
Cumulative Var   0.422   0.682   0.887
```

√ F1: Expectativa de vida ao nascer (H/M) dominante

(Força de vida ao nascer)

√ F2: Expectativa de vida em mulheres mais velhas

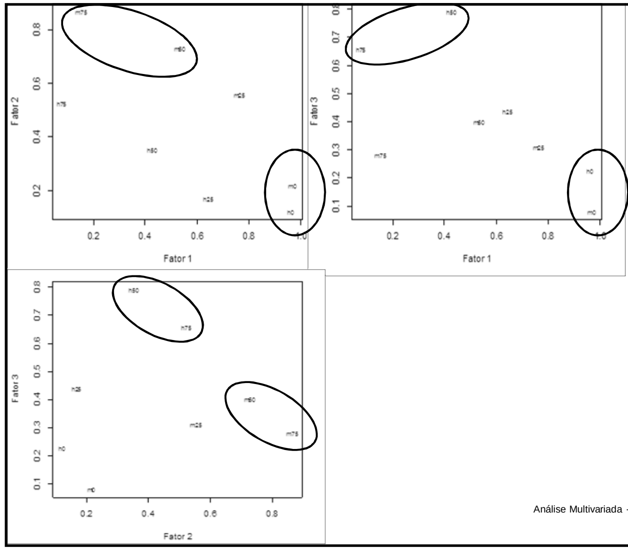
– (Força de vida mulheres mais velhas)

√ F3: Cargas maiores para h50 e h75

– (força de vida homens mais velhos)

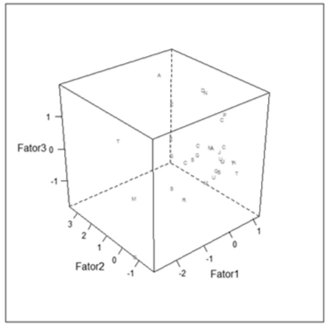
152

Análise Multivariada - 2016



Análise Multivariada - 2016 153

• Gráfico 3-D dos fatores vs. dados

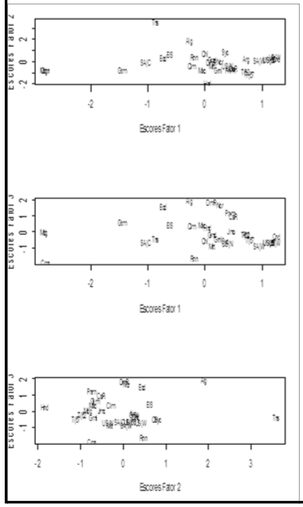



```
> # 3-D Plot dos 3 fatores vs. dados
>
> library(lattice)
> cloud(Fator3 ~ Fator1 * Fator2, xlim=range(Fator1), ylim=range(Fator2),
+ zlim=range(Fator3),
+       pch=row.names(vida.df),
+       scales = list(distance = rep(1, 3), arrows = FALSE))
>
```

154

Análise Multivariada - 2016

- Diagramas de dispersão dos escores fatoriais



- Força de vida ao nascer variando de países como Camarões e Madagascar para países como USA
- Argélia se sobressai no 3º. Eixo
  - √ Alta expectativa de vida entre homens
- Camarões baixa expectativa de vida aos 50

Referências

Bibliografia Recomendada

- MANLY, B. J. F. *Métodos Estatísticos Multivariados: uma Introdução.* Bookman, 2008.
- JOHNSON, R. A.; WINCHERN, D. W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall, 2007
- MINGOTI, D.C. *Análise de Dados através de Métodos de Estatística Multivariada*. Ed. UFMG, 2005.
- EVERITT, B.; HOTHORN, T. *An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R*. Springer, 2011.