

## Matrizes, Fatores e Listas



## Matrizes



- Todas as colunas tem de ter o mesmo comprimento e conter o mesmo tipo de dados (numérico, caracter, etc.)
- `matrix(vector, nrow=r, ncol=c, byrow=F, dimnames=list(char_vector_rownames, char_vector_colnames))`
  - ✓ `byrow=TRUE`: matriz deve ser montada pelas linhas.
  - ✓ `dimnames`: nomes para linhas e colunas (opcional)

Laboratório de Estatística - 2020

53



## Exemplos



- Criação de matrizes

```
# gera matriz numérica 5 x 4
y <- matrix(1:20, nrow=5, ncol=4)

# outro exemplo
celulas <- c(1, 26, 24, 68)
rnomes <- c("R1", "R2")
cnomes <- c("C1", "C2")
minha.matriz <- matrix(celulas, nrow=2, ncol=2, byrow=TRUE,
dimnames=list(rnomes, cnomes))
```

Laboratório de Estatística - 2020

54



## Exemplos



- Matrizes a partir de combinação de objetos

```
x <- c(11, 12, 13)           # Cria um vetor `x` com 3 valores
y <- c(55, 33, 12)           # Cria um vetor `y` com 3 valores
rbind(x, y)                  # Combina os vetores em linhas e
                             # cria uma matriz 2 x 3
cbind(x, y)                  # Combina os vetores em colunas e
                             # cria uma matriz 3 x 2
biometria <- cbind(peso, altura, imc) # cria matriz de dados
biometria
```

Laboratório de Estatística - 2020

55

## AjF • Atribuindo nomes às linhas e colunas

```

>
> x<-matrix(1:12,nrow=3,byrow=F)
>
> rownames(x)<-c('Primeira','Segunda','Terceira')
>
> colnames(x)<-LETTERS[1:4]
>
> x
      A B C D
Primeira 1 4 7 10
Segunda  2 5 8 11
Terceira 3 6 9 12
> |

```

Laboratório de Estatística - 2020



56

## Desconstrução de Matriz

- Podemos desconstruir uma matriz aplicando a função `c`
  - Combina todas as colunas em um vetor

```
c(minha.matriz) # Combina todas as colunas em um vetor
```

Laboratório de Estatística - 2020

57



## Matrizes – Indexação



- Identificação de linhas, colunas ou elementos usando subscritos.

```

# Cria matriz com 20 números aleatórios de normal padrão
x <- matrix(rnorm(20), ncol = 4)

x[,4]          # 4ª coluna da matriz
x[3,]          # 3ª linha da matriz
x[2:4,1:3]     # linhas 2,3 e 4 das colunas 1,2 e 3
X[c(1,3), c(2, 4)] # linhas 1 e 3 das colunas 2 e 4

```

Laboratório de Estatística - 2020

58

## Construção de Matrizes

- Comando `matrix()`:

```

> # construção de matriz com matrix()
> mat <- matrix(c(1, 0, 0, 1), nrow = 2, ncol = 2, byrow = TRUE)
> mat
      [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1

```

- Comando `is.matrix()`:

– Testa se um objeto é uma matriz (TRUE)

```

> # verifica se objeto é matriz
> is.matrix(mat)
[1] TRUE

```

Laboratório de Estatística - 2020

59



✓ Veja só o objeto `df`, que é um data frame

```
> df <- data.frame(x = c(1, 0), y = c(0, 1))
> df
  x  y
1 1  0
2 0  1
> is.matrix(df)
[1] FALSE
```

– Embora as saídas de `df` e `mat` sejam semelhantes, `df` não é uma matriz.

✓ Você pode converter `df` em objeto do tipo `matrix`

```
> # conversão em objeto tipo matrix
> df.mat <- as.matrix(df)
> is.matrix(df.mat)
[1] TRUE
> df.mat
  x  y
[1,] 1  0
[2,] 0  1
```

Laboratório de Estatística - 2020

60



• Outras matrizes

✓ Matriz de zeros

```
> # matriz de zeros
> zeros <- matrix(0, 3, 2)
> zeros
 [,1] [,2]
[1,] 0 0
[2,] 0 0
[3,] 0 0
```

✓ Matriz de uns

```
> # matriz de zeros
> zeros <- matrix(0, 2, 3)
> zeros
 [,1] [,2] [,3]
[1,] 0 0 0
[2,] 0 0 0
```

Laboratório de Estatística - 2020



61



## Matriz Diagonal



• A matriz `mat` é diagonal

✓ Pode ser construída pelo comando `diag()`.

```
> # construção de matriz diagonal
> m1 <- diag(2:3)
> m1
  [,1] [,2]
[1,] 2 0
[2,] 0 3
> # matriz com valores iguais na diagonal
> m2 <- diag(2, nrow = 3)
> m2
  [,1] [,2] [,3]
[1,] 2 0 0
[2,] 0 2 0
[3,] 0 0 2
```

Laboratório de Estatística - 2020

62



✓ Construção de matriz identidade com `diag()`.



```
> # matriz identidade
> m3 <- diag(2)
> m3
  [,1] [,2]
[1,] 1 0
[2,] 0 1
> n <- 10
> m4 <- diag(n)
> m4
```

✓ Construção da matriz da diagonal de matriz

```
> # Matriz diagonal da diagonal de outra matriz
> S <- matrix(c(2, 1, 4, 3, 2, 2, -2, 2, 3), nrow = 3, byrow = T)
> S
  [,1] [,2] [,3]
[1,] 2 1 4
[2,] 3 2 2
[3,] -2 2 3
> diag(diag(S))
  [,1] [,2] [,3]
[1,] 2 0 0
[2,] 0 2 0
[3,] 0 0 3
```

Laboratório de Estatística - 2020

63



## Algebra Matricial



- Exemplo com matrizes quadradas
  - ✓ Construção de matrizes:

```
> # Construção das matrizes quadradas mat1 e mat2
> mat1 <- matrix(c(0, 2, 1, 0), nrow = 2, ncol = 2, byrow = TRUE)
> mat1
[,1] [,2]
[1,] 0 2
[2,] 1 0
> mat2 <- matrix(1:4, nrow = 2, byrow = F)
> mat2
[,1] [,2] [,1] [,2]
[1,] 1 3
[2,] 2 4
```

Laboratório de Estatística - 2020

64

- Adição de matrizes:

✓ Exige matrizes de mesma dimensão

```
> # Adição de matrizes
> mat1 + mat2
[,1] [,2]
[1,] 1 5
[2,] 3 4
```

- Multiplicação por escalar

```
> # multiplicação por escalar
> 2 * mat2
[,1] [,2]
[1,] 2 6
[2,] 4 8
```

Laboratório de Estatística - 2020

65



- Multiplicação de matrizes:



✓ Sempre possível com matrizes quadradas de mesma dimensão

- ✓ Potência de matrizes:

- Possível apenas para matrizes quadradas

```
> # potência de matrizes
> mat2 %% mat2
[,1] [,2]
[1,] 7 15
[2,] 10 22
```

Laboratório de Estatística - 2020

66



- Inversa de uma matriz:

✓ Dada a matriz A, se existir sua inversa ( $A^{-1}$ ), então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

```
> # inversa da matriz
> mat2.inv <- solve(mat2)
> mat2.inv
[,1] [,2]
[1,] -2 1.5
[2,] 1 -0.5

> # conferência
> mat2 %*% mat2.inv
[,1] [,2]
[1,] 1 0
[2,] 0 1
> mat2.inv %*% mat2
[,1] [,2]
[1,] 1 0
[2,] 0 1
```

Laboratório de Estatística - 2020

67



- Multiplicação elemento a elemento de matrizes de mesma dimensão
  - ✓ Resultado do uso do operador \* entre matrizes de mesma ordem

```
> mat2
 [,1] [,2]
[1,] 1 3
[2,] 2 4

> # produto entre elementos de matrizes
> mat2 * mat2
 [,1] [,2]
[1,] 1 9
[2,] 4 16

> # produto entre matrizes
> mat2 %*% mat2
 [,1] [,2]
[1,] 7 15
[2,] 10 22
```

Laboratório de Estatística - 2020

68



- Exemplo com matrizes retangulares
  - ✓ Construção das matrizes

```
> # ----- matrizes retangulares
> # construção matrizes
> mat.A <- matrix(c(2, 3, -2, 1, 2, 2), nrow = 3, byrow = F)
> mat.A
 [,1] [,2]
[1,] 2 1
[2,] 3 2
[3,] -2 2
> dim(mat.A)
[1] 3 2
> mat.B <- matrix(c(2, 1, 3, -2, 2, 1), nrow = 2, byrow = T)
> mat.B
 [,1] [,2] [,3]
[1,] 2 1 3
[2,] -2 2 1
> dim(mat.B)
[1] 2 3
```

Laboratório de Estatística - 2020



69



- Multiplicação de matrizes:



- ✓ Só é possível se quantidade de colunas da matriz da esquerda é igual à quantidade de linhas da matriz da direita

- ✓ O produto mat.A x mat.B:

- $(3 \times 2)(2 \times 3)$ : é possível e o resultado será uma matriz  $3 \times 3$

```
> # produto das matrizes
> mat.A %*% mat.B
 [,1] [,2] [,3]
[1,] 2 4 7
[2,] 2 7 11
[3,] -8 2 -4
```

Laboratório de Estatística - 2020

70



- ✓ O produto mat.B x mat.A:



- $(2 \times 3)(3 \times 2)$ : é possível e o resultado será uma matriz  $2 \times 2$

```
> # produto das matrizes
> mat.A %*% mat.B
 [,1] [,2] [,3]
[1,] 2 4 7
[2,] 2 7 11
[3,] -8 2 -4
```

Laboratório de Estatística - 2020

71



## Matriz Transposta



- As linhas tornam-se colunas e as colunas, linhas

✓ Comando: `t()`

```
> # transpostas
> t(mat.A)
[,1] [,2] [,3]
[1,] 2 3 -2
[2,] 1 2 2
> t(mat.B)
[,1] [,2]
[1,] 2 -2
[2,] 1 2
[3,] 3 1
> t(t(mat.B))
[,1] [,2] [,3]
[1,] 2 1 3
[2,] -2 2 1
```

Laboratório de Estatística - 2020

72



## ✓ Produto entre as matrizes e sua transpostas



```
> # produto entre a matriz e sua transposta
> mat.A %*% t(mat.A)
[,1] [,2] [,3]
[1,] 5 8 -2
[2,] 8 13 -2
[3,] -2 -2 8
> t(mat.A) %*% mat.A
[,1] [,2]
[1,] 17 4
[2,] 4 9
> mat.B %*% t(mat.B)
[,1] [,2]
[1,] 14 1
[2,] 1 9
> t(mat.B) %*% mat.B
[,1] [,2] [,3]
[1,] 8 -2 4
[2,] -2 5 5
[3,] 4 5 10
```

✓ Que característica você percebe nessas matrizes?

Laboratório de Estatística - 2020

73



- Matrizes simétricas:

✓ A matriz é igual a sua transposta, ou seja

$$A = A^t$$

✓ As matrizes obtidas no slide anterior são simétricas?

✓ Será que sempre posso multiplicar uma matriz por sua transposta?

✓ O resultado desta multiplicação será sempre uma matriz simétrica?



Laboratório de Estatística - 2020

74



## Arrays



- Arrays são similares a matrizes, mas podem ter mais de duas dimensões.

Laboratório de Estatística - 2020

75

**Fatores**

- Estrutura de dados para variável categórica:
  - ✓ Há análises que o R precisar distinguir códigos categóricos dos numéricos
  - ✓ Ex.: média de variável categórica

```
# variável sexo com 20 componentes "masc" e
# 30 "fem"
sexo <- c(rep("masc",20), rep("fem", 30))
sexo <- factor(sexo)
# armazena sexo como 20 1's and 30 2's e associa
# internamente 1=fem, 2=masc (alfabeticamente)
# R agora trata sexo com uma variável nominal
summary(sexo)
```

77

Laboratório de Estatística - 2020

**Variável Categórica Codificada Numericamente**

```
# variável codificando nível de dor de 5 pacientes
dor <- c(0, 3, 2, 2, 1) # cria o vetor dor
fdor <- factor(dor, level = 0:3) # Transforma em categórica

# muda nome dos níveis do fator
levels(fdor) <- c("nenhum", "leve", "medio", "grave")
fdor
levels(fdor) # extrai os nomes dos níveis do fator
as.numeric(fdor) # extrai códigos numéricos dos níveis do fator
```

78

Laboratório de Estatística - 2020

**Fator Ordenado**

- Usado para representação de variável ordinal

```
# Cria string denominada nível (nível de negócios).

nível <- c("baixo", "medio", "baixo", "baixo", "baixo",
         "medio", "baixo", "medio", "medio", "medio", "medio",
         "alto", "alto", "baixo", "medio", "medio", "baixo", "alto")
is.factor(nível) # verifica se nível é fator
is.character(nível) # verifica se nível é string
fnível <- factor(nível) # transforma nível em fator
is.factor(fnível) # verifica se nível é fator
levels(fnível) # extrai os nomes dos níveis do fator

# Criando fator com a ordem correta dos níveis
fnível.ord <- factor(nível, levels = c("baixo", "medio", "alto"))
levels(fnível.ord)
# ordenando fator
fnível.ord2 <- ordered(fnível, levels = c("baixo", "medio", "alto"))
levels(fnível.ord2)
```

79

Laboratório de Estatística - 2020

**Listas**

- Coleção ordenada de objetos (componentes)
  - ✓ Permite que você reuna objetos de diferentes tipos sob o mesmo nome.

```
# Exemplo de uma lista com 4 componentes
# uma string, um vetor numérico, uma matriz e um escalar
w <- list(nome = "Thiago", numeros=peso, matriz=biometria, idade=62)
w
w$matriz

# Criação de lista contendo duas listas
v <- c(lista1,lista2)
```

81

Laboratório de Estatística - 2020



## Listas – Indexação



- Identificação dos objetos de uma lista usando [ [ ] ].

```
minhalista[[2]]          # 2º componente da lista
minhalista[["nome_dele"]] # componente denominado nome_dele na lista
```

82

Laboratório de Estatística - 2020